

1. FORMALE LOGIK

Proposition 1.1. Die logischen Elementarverknüpfungen gehorchen folgenden Äquivalenzen:

$$(1.1) \quad p \wedge p \iff p \quad \text{Idempotenz}$$

$$(1.2) \quad p \vee p \iff p$$

$$(1.3) \quad p \wedge q \iff q \wedge p \quad \text{Kommutativität}$$

$$(1.4) \quad p \vee q \iff q \vee p$$

$$(1.5) \quad (p \wedge q) \wedge r \iff p \wedge (q \wedge r) \quad \text{Assoziativität}$$

$$(1.6) \quad (p \vee q) \vee r \iff p \vee (q \vee r)$$

$$(1.7) \quad p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad \text{Distributivität}$$

$$(1.8) \quad p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$(1.9) \quad \neg(p \wedge q) \iff (\neg p) \vee (\neg q) \quad \text{De Morgansche Regeln}$$

$$(1.10) \quad \neg(p \vee q) \iff (\neg p) \wedge (\neg q)$$

Beweis. Übungsaufgabe (z.B. mittels Wahrheitstabeln) □

Axiom 1.2. Für die Quantoren werden folgende Regeln als wahr angenommen:

$$(1.11) \quad \forall a \in A \forall b \in B : p(a, b) \iff \forall b \in B \forall a \in A : p(a, b)$$

$$(1.12) \quad \exists a \in A \exists b \in B : p(a, b) \iff \exists b \in B \exists a \in A : p(a, b)$$

$$(1.13) \quad \exists a \in A \forall b \in B : p(a, b) \implies \forall b \in B \exists a \in A : p(a, b)$$

$$(1.14) \quad \neg(\forall a \in A : p(a)) \iff \exists a \in A : \neg(p(a))$$

$$(1.15) \quad \neg(\exists a \in A : p(a)) \iff \forall a \in A : \neg(p(a))$$

Frage 1.3. Warum gilt die Implikation in Gleichung (1.13) nur von links nach rechts? Finden Sie ein Beispiel, bei dem die umgekehrte Implikation falsch wird.

2. MENGENLEHRE

Definition 2.1. Seien $A, B \subset X$ zwei Teilmengen einer Menge X , so definiert man:

Vereinigung	$A \cup B := \{x \in X \mid x \in A \vee x \in B\}$
Durchschnitt	$A \cap B := \{x \in X \mid x \in A \wedge x \in B\}$
Differenz	$A \setminus B := \{x \in X \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
Komplement	$A^c := X \setminus A = \{x \in X \mid x \notin A\}$

Proposition 2.2. Für A, B, C, D beliebige Mengen gilt:

$$(2.1) \quad A \cap B \subset A \subset A \cup B$$

$$(2.2) \quad A \subset B \wedge C \subset D \implies A \cup C \subset B \cup D$$

$$(2.3) \quad A \subset B \wedge C \subset D \implies A \cap C \subset B \cap D$$

Beweis. Zu (2.1): $\{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \subset \{x \mid x \in A\} \subset \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ gilt nach den Regeln der formalen Logik, denn sei $p(x) := x \in A$ und $q(x) := x \in B$, so folgt:
 $p(x) \wedge q(x) \implies p(x) \implies p(x) \vee q(x)$
 (eventuell mittels Wahrheitstabellen nachprüfen).

Zu (2.2): Für beliebige x gilt:

$$x \in A \cup C \stackrel{\text{Def}}{\iff} x \in A \vee x \in C \stackrel{A \subset B, C \subset D}{\implies} x \in B \vee x \in D \stackrel{\text{Def}}{\iff} x \in B \cup D$$

Zu (2.3): Analog zu (2.2) mit \wedge statt \vee . □

3. AXIOME DER REELLEN ZAHLEN

Für die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen gelten folgende Axiome:

Körperaxiome (Rechenregeln, algebraische Struktur):

$$\begin{array}{ll} \text{(A1)} & \forall a, b \in \mathbb{R} : \quad a + b = b + a \\ \text{(M1)} & \forall a, b \in \mathbb{R} : \quad a \cdot b = b \cdot a \\ \\ \text{(A2)} & \forall a, b, c \in \mathbb{R} : \quad (a + b) + c = a + (b + c) \\ \text{(M2)} & \forall a, b, c \in \mathbb{R} : \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \\ \\ \text{(A3)} & \exists 0 \in \mathbb{R} \forall a \in \mathbb{R} : \quad a + 0 = a \\ \text{(M3)} & \exists 1 \in \mathbb{R} \forall a \in \mathbb{R} : \quad a \cdot 1 = a \\ \\ \text{(A4)} & \forall a \in \mathbb{R} \exists (-a) \in \mathbb{R} : \quad a + (-a) = 0 \\ \text{(M4)} & \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists (a^{-1}) \in \mathbb{R} : \quad a \cdot (a^{-1}) = 1 \\ \\ \text{(D)} & \forall a, b, c \in \mathbb{R} : \quad a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \end{array}$$

Diese Axiome gelten in jedem beliebigen Körper K (ersetzt überall \mathbb{R} durch K).

Zusätzlich definieren folgende Axiome eine Ordnungsrelation auf \mathbb{R} :

Anordnungsaxiome (Ungleichungen, Abschätzungen):

$$\begin{array}{ll} \text{(AO1)} & \forall a \in \mathbb{R} \quad \text{Es gilt genau eine der Aussagen: } a \in P, a = 0, (-a) \in P \\ \text{(AO2)} & \forall a, b \in P : \quad a + b \in P \\ \text{(AO3)} & \forall a, b \in P : \quad a \cdot b \in P \end{array}$$

P ist die Menge der positiven Elemente (des Körpers). Für \mathbb{R} ist $P = \mathbb{R}^+$

$$\begin{array}{l} a < b \quad :\iff \quad b + (-a) > 0 \quad \text{d.h.} \quad b + (-a) \in P \\ a \leq b \quad :\iff \quad a = b \quad \vee \quad a < b \end{array}$$

Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen (diese gelten in jedem angeordneten Körper):

$\forall a, b \in \mathbb{R} :$ Es gilt **genau eine** der Aussagen: $a < b$, $a = b$, $b < a$

$\forall a, b, c \in \mathbb{R} :$ $a < b \wedge b < c \implies a < c$

$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} :$ $a < b \wedge c \leq d \implies a + c < b + d$

$\forall a, b, c \in \mathbb{R} :$ $a < b \wedge c > 0 \implies a \cdot c < b \cdot c$

$\forall a, b \in \mathbb{R} :$ $a < b \iff -a > -b$

$\forall a, b \in \mathbb{R} :$ $a \leq b \wedge b \leq a \iff a = b$

$\forall a \in \mathbb{R} :$ $a \neq 0 \implies a^2 > 0$ Speziell: $1 = 1 \cdot 1 > 0$

$\forall a \in \mathbb{R} :$ $a > 0 \iff a^{-1} > 0$

$\forall a, b \in \mathbb{R} :$ $0 < a < b \iff 0 < b^{-1} < a^{-1}$

Der Betrag auf \mathbb{R}

Betragsfunktion: $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$

Eigenschaften:

- $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \geq 0 \wedge (|x| = 0 \iff x = 0)$
- $\forall x, y \in \mathbb{R} : |xy| = |x| \cdot |y|$ speziell: $|-x| = |x|$
- $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x \pm y| \leq |x| + |y|$ Dreiecksungleichung
- $\forall x, y \in \mathbb{R} : ||x| - |y|| \leq |x \pm y|$ umgekehrte Dreiecksungleichung
- $\forall x \in \mathbb{R}, \varepsilon \geq 0 : |x| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$ speziell für $\varepsilon := |x|$

Maximum/Minimum, Supremum/Infimum

Definition 3.1. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

$c \in \mathbb{R}$ heißt **Maximum** von $M : \iff c \in M \wedge \forall x \in M : x \leq c$

$c \in \mathbb{R}$ heißt **Minimum** von $M : \iff c \in M \wedge \forall x \in M : x \geq c$

Maximum/Minimum sind eindeutig, da aufgrund der Anordnungsaxiome aus $c \leq c'$ und $c' \leq c$ sofort $c = c'$ folgt.

Definition 3.2. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

$s \in \mathbb{R}$ heißt **obere Schranke** von $M : \iff \forall x \in M : x \leq s$

$s \in \mathbb{R}$ heißt **untere Schranke** von $M : \iff \forall x \in M : x \geq s$

Das Vollständigkeitsaxiom:

(VA) Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ reeller Zahlen hat eine kleinste obere Schranke $s_0 \in \mathbb{R}$; d.h.

$$\forall x \in M : x \leq s_0 \wedge \forall s \in \mathbb{R} \text{ obere Schranke zu } M \text{ gilt: } s_0 \leq s$$

Man nennt s_0 das **Supremum** $\sup M$ der Menge M (Analog: Das **Infimum** $\inf M$ von M ist die größte untere Schranke einer nichtleeren, nach unten beschränkten Menge $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$).

\sup , \inf sind **eindeutig** bestimmt, als (eindeutiges) Maximum/Minimum der Menge aller oberen/unteren Schranken.

Satz 3.3 (Skript 1.3.1). Ist $s_0 \in \mathbb{R}$ eine obere (untere) Schranke von $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$, so ist

$$s_0 = \sup M \iff \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : s_0 - \varepsilon < x$$

$$s_0 = \inf M \iff \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : s_0 + \varepsilon > x$$

Satz 3.4 (Archimedisches Prinzip, Skript 2.2.1). Die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen ist nicht nach oben beschränkt, d.h.

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n > x$$

Beweis. [Widerspruch] Annahme: \mathbb{N} ist nach oben beschränkt.

Wegen $\emptyset \neq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{(VA)} \exists s_0 \in \mathbb{R}$ kleinste obere Schranke mit $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq s_0$

$s_0 = \sup \mathbb{N} \implies s_0 - 1$ ist keine obere Schranke, d.h. $\exists N \in \mathbb{N} : N > s_0 - 1$

$\implies s_0 < N + 1 \in \mathbb{N} \quad \text{! zu } \forall n \in \mathbb{N} : n \leq s_0$

$\implies \mathbb{N}$ ist nach oben unbeschränkt. □

4. NATÜRLICHE ZAHLEN, VOLLSTÄNDIGE INDUKTION

Vorgang des Zählens; starte bei 1 und zu jeder bereits konstruierten Zahl N definiere den Nachfolger $N + 1$ als Summe aus N und 1.

\implies Natürliche Zahlen wachsen (wegen $0 < 1$ gilt stets $N < N + 1$) und sind nach oben unbeschränkt, d.h. $\forall x \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : N > x$.

Definition 4.1. Eine Menge $Z \subset \mathbb{R}$ heißt Zählmenge (oder induktive Menge) $:\iff 1 \in Z \wedge \forall x \in Z : x + 1 \in Z$

Die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen ist die kleinste Zählmenge, d.h. $\mathbb{N} := \bigcap_{Z \subset \mathbb{R} \text{ Zählmenge}} Z$

Es gilt: $n \in \mathbb{N} \iff \forall Z \subset \mathbb{R} \text{ Zählmenge} : n \in Z$.

Satz 4.2 (2.1.3). Für $M \subset \mathbb{N}$ mit $1 \in M$ und $\forall m \in M : m + 1 \in M$ gilt bereits $M = \mathbb{N}$.

Satz 4.3 (2.1.4). Sei $A(n)$ eine von $n \in \mathbb{N}$ abhängige Aussage und es gelte:

- $A(1)$ ist wahr.
- $\forall n \in \mathbb{N} : A(n) \implies A(n + 1)$

so ist $A(n)$ bereits für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Analog gilt: Sei $A(n)$ eine von $n \in \mathbb{N}$ abhängige Aussage und es gelte:

- $A(1)$ ist wahr.
- $\forall n \in \mathbb{N} : A(1) \wedge A(2) \wedge \dots \wedge A(n - 1) \wedge A(n) \implies A(n + 1)$

so ist $A(n)$ bereits für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Rekursive Definitionen:

Satz 4.4 (Dedekindscher Rekursionssatz). Sei $B \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge und $f : \mathbb{N} \rightarrow B$ eine Funktion mit

- $f(1)$ ist definiert
- $\exists F : \mathbb{N} \times B \rightarrow B, (n, x) \mapsto F(n, x)$ eine (Schar-)Funktion mit $f(n + 1) = F(n, f(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

so ist die Funktion f eindeutig festgelegt (und wohldefiniert).

5. METRISCHE RÄUME, NORMIERTE VEKTORRÄUME

Definition 5.1. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto d(x, y)$ heißt **Metrik**, genau dann, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt:

- | | |
|---------------------------------------|---------------------|
| (M1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ | Definitheit |
| (M2) $d(x, y) = d(y, x)$ | Symmetrie |
| (M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ | Dreiecksungleichung |

Weiterhin gilt für beliebige $x, y \in X$: $d(x, y) \geq 0$ (folgt aus (M1), (M2) und (M3)).

Definition 5.2. Sei V ein $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} -Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$, $v \mapsto \|v\|$ heißt **Norm**, genau dann wenn für alle $v, w \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

- | | |
|--|---------------------|
| (N1) $\ v\ = 0 \iff v = 0$ | Definitheit |
| (N2) $\ \lambda \cdot v\ = \lambda \cdot \ v\ $ | Homogenität |
| (N3) $\ v + w\ \leq \ v\ + \ w\ $ | Dreiecksungleichung |

Wieder gilt $\|v\| \geq 0$ für beliebige $v \in V$ (folgt aus (N1), (N2) und (N3)).

Aus jeder Norm kann man einen Abstandsbegriff, d.h. eine Metrik erhalten, indem man definiert: $d(x, y) := \|x - y\|$. Ein normierter Vektorraum ist also immer auch ein metrischer Raum (Die Umkehrung gilt nicht).

Definition 5.3. Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|$ auf dem \mathbb{K} -Vektorraum V heißen **äquivalent** $:\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \beta > 0 \forall v \in V : \alpha \|v\| \leq \|v\| \leq \beta \|v\|$

Dies ergibt eine **Äquivalenzrelation** auf der Menge aller Normen auf einem festen Vektorraum V .

Äquivalente Normen ergeben den **gleichen Konvergenzbegriff** (Umgebungen liegen geschachtelt ineinander).

Satz 5.4. *Alle Normen im \mathbb{K}^n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} und $n \in \mathbb{N}$) sind äquivalent.*

Corollar 5.5. *Alle Metriken im \mathbb{K}^n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} und $n \in \mathbb{N}$), die durch Normen erzeugt werden, ergeben den gleichen Konvergenzbegriff.*

6. KONVERGENZ VON ZAHLENFOLGEN

Definition 6.1. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ($a_n \in \mathbb{K}$) konvergiert gegen $a \in \mathbb{K}$

$$:\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : a_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{K} \mid |x - a| < \varepsilon\}$$

Satz 6.2. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen reeller Zahlen mit $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq b_n$, so folgt $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

Corollar 6.3. $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folge reeller Zahlen mit $c := \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$: $\alpha \leq c_n \leq \beta$, so folgt $\alpha \leq c \leq \beta$.

Beweis. Benutze zweimal den Satz 6.2. Einmal für die konstante Folge $(\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ und die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ergibt die untere Abschätzung) und einmal für die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und die konstante Folge $(\beta)_{n \in \mathbb{N}}$ (ergibt die obere Abschätzung). \square

Corollar 6.4. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen reeller Zahlen mit $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq x_n \leq b_n$, so ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Satz 6.5. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ($a_n, b_n \in \mathbb{K}$) zwei konvergente Zahlenfolgen mit $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Es gelten folgende Rechenregeln:

- (1) $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
- (2) $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- (3) $(\lambda \cdot a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot a$ für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$
- (4) Falls $b \neq 0$ ist $(\frac{a_n}{b_n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$
- (5) $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (|a_n|) = |a|$
- (6) $(\bar{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{a}_n) = \bar{a}$
- (7) Für $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexe Zahlenfolge ($a_n \in \mathbb{C}$) und $a \in \mathbb{C}$ sind äquivalent:
 - $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$
 - $(\operatorname{Re}(a_n))_{n \in \mathbb{N}}, (\operatorname{Im}(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (\operatorname{Re}(a_n)) = \operatorname{Re}(a)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (\operatorname{Im}(a_n)) = \operatorname{Im}(a)$

Achtung: Die Umkehrung gilt nicht, d.h. aus der Konvergenz der Folgen $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kann beispielsweise nicht auf die Konvergenz der Einzelfolgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ geschlossen werden.

Lemma 6.6. Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist auch $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Satz 6.7. Jede reelle, monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert (und zwar gegen $\sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$).
 Jede reelle, monoton fallende und nach unten beschränkte Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert (und zwar gegen $\inf \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$).

Definition 6.8. $a \in \mathbb{K}$ heißt **Häufungspunkt** einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
 $:\Leftrightarrow$ In jeder ε -Umgebung von a liegen **unendlich viele** Folgenglieder, d.h.
 $\forall \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : a_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(a)$

Es gilt:

- (1) $a \in \mathbb{K}$ ist Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ \Leftrightarrow $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ enthält eine gegen a konvergente Teilfolge.
- (2) Konvergente Folgen haben genau einen Häufungspunkt (Umkehrung gilt nicht).

Satz 6.9 (Bolzano-Weierstraß). Jede beschränkte reelle (komplexe) Zahlenfolge besitzt einen Häufungspunkt.

Definition 6.10. Eine reelle (komplexe) Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **Cauchy-Folge** $:\Leftrightarrow$
 $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon$

Satz 6.11. Eine reelle (komplexe) Zahlenfolge konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Damit gilt sofort:

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n, m \geq N : |a_n - a_m| \geq \varepsilon$

7. MÄCHTIGKEIT VON MENGEN, ABZÄHLBARKEIT – ÜBERABZÄHLBARKEIT

Definition 7.1. Seien A, B zwei Mengen.

$A \sim B$ (**gleichmächtig**) $:\iff \exists f : A \rightarrow B$ bijektiv

$A \prec B$ (B **mächtiger** als A) $:\iff \exists f : A \rightarrow B$ injektiv

\sim ist eine **Äquivalenzrelation** (Übung)

$A \sim B$ gilt genau dann, wenn eine Zuordnung der Elemente von A auf die Elemente von B möglich ist, bei der weder Elemente von A noch von B übrig bleiben.

$A \prec B$ gilt genau dann, wenn eine Zuordnung der Elemente von A auf die Elemente von B möglich ist, bei der höchstens Elemente von B (aber keine Elemente von A) übrig bleiben.

Satz 7.2 (Schröder-Bernstein). *Seien A, B zwei Mengen. Gilt $A \prec B$ und $B \prec A$ so folgt bereits $A \sim B$.*

Definition 7.3. Eine Menge A heißt

endlich	$:\iff$	$A = \emptyset$ oder $\exists N \in \mathbb{N} : A \sim \{1, 2, 3, \dots, N\}$
abzählbar unendlich	$:\iff$	$A \sim \mathbb{N}$
(höchstens) abzählbar	$:\iff$	$A \prec \mathbb{N}$ (äquivalent dazu A endlich oder $A \sim \mathbb{N}$)
überabzählbar	$:\iff$	$\mathbb{N} \prec A$ und $A \not\sim \mathbb{N}$

Die Gültigkeit folgender Aussagen sollte klar sein:

- Jede Teilmenge einer endlichen Menge ist endlich.
- Vereinigungen endlich vieler endlicher Mengen sind endlich.
- Kartesische Produkte endlich vieler endlicher Mengen sind endlich.

Die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen ist **nicht endlich**, nach Definition aber **abzählbar unendlich**.

Ebenfalls abzählbar unendlich (und damit gleichmächtig zu \mathbb{N}) sind: $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_0 \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

Für (höchstens) abzählbare Mengen gelten folgende Aussagen (vgl. oben; Übung):

- Jede Teilmenge einer (höchstens) abzählbaren Menge ist (höchstens) abzählbar.
- Vereinigungen abzählbar vieler (höchstens) abzählbarer Mengen sind (höchstens) abzählbar.
- Kartesische Produkte **endlich vieler** (höchstens) abzählbarer Mengen sind (höchstens) abzählbar. **ABER:** Kartesische Produkte **abzählbar unendlich vieler** (sogar endlicher) Mengen sind im Allgemeinen **überabzählbar**, z.B. $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ jeder beliebigen Menge A ist echt mächtiger als A , d.h. $A \prec \mathcal{P}(A)$ und $A \not\sim \mathcal{P}(A)$.

8. REIHEN – KONVERGENZKRITERIEN

Definition 8.1. Zu jeder Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (mit $a_k \in \mathbb{K}$) definiert man die **Reihe** $\sum a_k$ als Folge $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen $s_k := \sum_{n=1}^k a_n$.

Eine Reihe $\sum a_k$ **konvergiert** $:\Leftrightarrow$ Die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ihrer Partialsummen konvergiert.

In diesem Fall heißt der Grenzwert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{N \rightarrow \infty} s_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n$ der **Wert der Reihe**.

Offensichtlich konvergiert eine Reihe $\sum a_k$ höchstens dann, wenn die Folge ihrer Glieder a_k eine Nullfolge ist.

Definition 8.2. Eine Reihe $\sum a_k$ heißt **absolut konvergent** $:\Leftrightarrow$ Die Reihe $\sum |a_k|$ der Absolutbeträge konvergiert.

Aus absoluter Konvergenz folgt Konvergenz, während die Umkehrung nicht allgemein gilt.

Satz 8.3 (Quotientenkriterium (10.2.11)). Sei $\sum a_k$ eine Reihe mit $a_k \in \mathbb{K}$ und $a_k \neq 0$ für fast alle k .

$$\begin{aligned} \exists q \in]0, 1[: \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q \text{ für fast alle } k &\implies \sum a_k \text{ konvergiert (absolut)} \\ \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1 \text{ für fast alle } k &\implies \sum a_k \text{ divergiert} \end{aligned}$$

Satz 8.4 (Wurzelkriterium (10.2.13)). Sei $\sum a_k$ eine Reihe mit $a_k \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} \exists q \in]0, 1[: \sqrt[k]{|a_k|} \leq q \text{ für fast alle } k &\implies \sum a_k \text{ konvergiert (absolut)} \\ \sqrt[k]{|a_k|} \geq 1 \text{ für } \infty\text{-viele } k &\implies \sum a_k \text{ divergiert} \end{aligned}$$

Das Wurzelkriterium ist stärker als das Quotientenkriterium, seine Anwendung ist aber meist auch schwieriger.

Satz 8.5 (Produktreihensatz (10.4.7)). Seien $\sum a_k, \sum b_k$ zwei **absolut konvergente** Reihen ($a_k, b_k \in \mathbb{K}$), so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l = \sum_{n=0}^{\infty} p_n$ mit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Abzählung der Menge $\{a_k \cdot b_l \mid k, l \in \mathbb{N}_0\}$ aller Produkte.

Speziell gilt: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n a_j \cdot b_{n-j} \right)$

9. STETIGKEIT VON FUNKTIONEN

Definition 9.1. Eine Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ (mit $\emptyset \neq D \subset \mathbb{K}$) ist **stetig in** $a \in D$

$$:\iff \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } x_n \in D \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ gilt: } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$$

Speziell konvergiert die Folge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ der Funktionswerte für jede Wahl von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 f heißt **stetig (in D)** : $\iff f$ ist stetig in jedem Punkt $a \in D$.

Bei stetigen Funktionen sind also Grenzwertbildung und Funktionsauswertung vertauschbar.

Satz 9.2 (Äquivalenzsatz (11.2.1)). Für eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ (mit $\emptyset \neq D \subset \mathbb{K}$) und $a \in D$ sind äquivalent:

- $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D : |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(D \cap U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(f(a))$

Satz 9.3 (Rechenregeln). Sei $D \subset \mathbb{K}$ und $f, g : D \rightarrow \mathbb{K}$ beide stetig in $a \in D$, so gilt:

- $f + g : D \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto f(x) + g(x)$ ist stetig in a
- $f \cdot g : D \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ ist stetig in a
- Falls $g(a) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g} : D' := \{x \in D \mid g(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ stetig in a

Die stetigen Funktionen bilden eine \mathbb{K} -Algebra.

Satz 9.4. Seien $D, E \subset \mathbb{K}$ und $f : D \rightarrow E$ stetig in $a \in D$ sowie $g : E \rightarrow \mathbb{K}$ stetig in $f(a) \in E$, so ist auch $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{K}$ stetig in a .

Satz 9.5. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ stetig mit $f(a) \neq 0$ für ein $a \in D \subset \mathbb{K}$, so existiert $\delta > 0$ mit:
 $\forall x \in U_\delta(a) \cap D : f(x) \neq 0$

Satz 9.6 (Nullstellensatz). Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $a < b \in D$ mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (bzw. $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$) so existiert $p \in]a, b[$ mit $f(p) = 0$

Corollar 9.7.

- ZWS: Jeder Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wird angenommen.
- Stetiges Bild eines (kompakten) Intervalls ist wieder ein (kompaktes) Intervall

Anwendungen:

Existenz k -ter Wurzeln und Existenz einer (reellen) Nullstelle bei Polynomen ungeraden Grades.

Satz 9.8 (vom Maximum und Minimum). Sei $K \subset \mathbb{K}$ kompakt und $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so nimmt f sein Minimum und sein Maximum an, d.h. $\exists x_{Max}, x_{Min} \in K \forall x \in K : f(x_{Min}) \leq f(x) \leq f(x_{Max})$