Übungen zur Vorlesung Analysis I – SS 2006 Blatt 7

Dr. Rolf Busam, Dr. M. Schraudner

Internetbegleitung: http://math.uni-heidelberg.de/studinfo/schraudner/anabusam1.html
Abgabe: Freitag, 23.06.2006, 11.00 Uhr
Bitte Namen und Übungsgruppe auf den abgegebenen Blättern vermerken

---

31. Sei $a \in \mathbb{R}, a > 0$, und $x_0 \in \mathbb{R}, x_0 > 0$, so gewählt, dass $ax_0 < 2$ gilt. Zeigen Sie, dass die mit dem Startwert x_0 und durch $x_{n+1} := 2x_n - ax_n^2$, für $n \geq 0$ rekursiv definierte Folge (x_n) ab $n \geq 1$ monoton wächst und gegen $\frac{1}{a}$ konvergiert.

    Zeigen Sie ferner, dass die Konvergenz *quadratisch* ist, d.h. es gibt eine positive reelle Zahl C, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

    $$\left| x_{n+1} - \frac{1}{a} \right| \leq C \left(x_n - \frac{1}{a} \right)^2 .$$

    Für $a = 7$ und $x_0 = 0{,}1$ berechne man x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. (4P)

32. Sei (a_n) eine Folge *positiver* reeller Zahlen. Zeigen sie, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind:

    (a) Zu jeder reellen Zahl $C > 0$ gibt es eine natürliche Zahl N, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt
    $$a_n > C .$$
    (Man sagt: "Die Folge (a_n) wächst über alle Grenzen").

    (b) Die Folge $(b_n) := \left(\frac{1}{a_n}\right)$ ist eine Nullfolge.

    (4P)

33. Sei a eine positive reelle Zahl. Man wähle eine positive reelle Zahl x_0 mit $x_0^3 > a$ als Startwert und definiere rekursiv $(n \in \mathbb{N}_0)$

    $$x_{n+1} := x_n + \frac{a - x_n^3}{3x_n^2} = \frac{2x_n^3 + a}{3x_n^2} .$$

    Zeige: (x_n) konvergiert monoton fallend gegen die eindeutig bestimmte positive Lösung der Gleichung $x^3 = a$.

    Bezeichnung: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n =: \sqrt[3]{a}$.

    Man zeige wieder die quadratische Konvergenz:

    $$\left| x_{n+1} - \sqrt[3]{a} \right| \leq C(x_n - \sqrt[3]{a})^2 \quad (C > 0 \text{ geeignet}) .$$

    Für $a = 2$ und $x_0 = 2$ bestimme man x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. (4P)

34. Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren und die angegebenen Summen haben

(α) $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{(-1)^k}{3^k}\right)=\frac{11}{4}$

(β) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+3}{k(k+1)(k+2)}=\frac{5}{4}$

(γ) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{3}{4}s$ mit $s:=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$

(δ) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{f_k f_{k+2}}=1$

dabei ist f_k die k-te Fibonacci-Zahl. (4P)

35.* Bei unserer Zeitreise durch die Geschichte der Mathematik verweilen wir auf unserem fliegenden Teppich in der Zeit der Christenverfolgung über der Arena des Kolosseums in Rom und entdecken in der kreisförmigen Arena einen Christen und einen sehr hungrigen Löwen an verschiedenen Stellen der Arena, die aber beide gleich schnell laufen können. Zur Einfachheit denken wir uns beide jeweils zu einem Punkt geschrumpft.

Was würden Sie an Stelle des Christen tun?

(a) Ein Stoßgebet zum Himmel schicken und auf ein Wunder hoffen?

(b) Was sonst? (Versuchen Sie eine Überlebensstrategie zu entwickeln.)

Tipp: Die Reihe $\sum \frac{1}{k^2}$ ist konvergent, die Reihe $\sum \frac{1}{k}$ ist divergent. (6P)