Übungen zur Vorlesung Analysis I – SS 2006 Blatt 6

Dr. Rolf Busam, Dr. M. Schraudner

Internetbegleitung: http://math.uni-heidelberg.de/studinfo/schraudner/anabusam1.html
Abgabe: Freitag, 16.06.2006, 11.00 Uhr
Bitte Namen und Übungsgruppe auf den abgegebenen Blättern vermerken

---

26. Beweisen Sie folgende Grenzwertaussagen:

    (a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n+2}{4n^3+1} = 0$ (b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2-n^2}{n} = 2$

    (c) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4} = \dfrac{1}{4}$ (d) $\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}\right) = 1$

    (4P)

27. Die Folge (x_n) sei rekursiv definiert durch $x_0 := 1$ und $x_n := \sqrt{1+x_{n-1}}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass (x_n) konvergiert und den Grenzwert $g := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ besitzt. (4P)

28. Die komplexe Folge (c_n) konvergiere gegen $c \in \mathbb{C}$.

    (a) Zeigen Sie, dass dann auch die Folge $(\sigma_n) = \left(\dfrac{\sum_{k=1}^n c_k}{n}\right)$ gegen c konvergiert.

    (b) Gilt auch die Umkehrung von (a)? Beweis oder Gegenbeispiel! (4P)

29. Sei $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, und $\sqrt{a}$ eine ihrer beiden Wurzeln. Zeigen Sie, dass die mit einem beliebigen Startwert $z_0 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}i\sqrt{a}$ durch $z_{n+1} := \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{a}{z_n}\right)$ rekursiv definierte Folge (z_n) gegen eine Wurzel aus a konvergiert und zwar gegen diejenige, die in derselben durch die Gerade $G := \mathbb{R}i\sqrt{a}$ bestimmten Halbebene liegt wie z_0. Was passiert bei $z_0 \in G$? (4P)

30.* Ein Kriminalfall:

    KHK K. hat drei Tatverdächtige, nennen wir sie P, Q und R. Die Vorermittlungen haben ergeben:

    (a) Wenn sich Q oder R als Täter herausstellen, dann ist P unschuldig.

    (b) Ist aber P oder R unschuldig, dann muss Q der Täter sein.

    (c) Ist R schuldig, dann ist P Mittäter.

    Wer also war(en) der/die Täter, wer ist unschuldig? (4P)