Übungen zur Vorlesung Analysis I – SS 2006 Blatt 5
Dr. Rolf Busam, Dr. M. Schraudner

Internetbegleitung: http://math.uni-heidelberg.de/studinfo/schraudner/anabusam1.html
Abgabe: Freitag, 02.06.2006, 11.00 Uhr
Bitte Namen und Übungsgruppe auf den abgegebenen Blättern vermerken

---

21. Bestimmen Sie für $n = 3, 4$ und 5 alle $z \in \mathbb{C}$ mit

    $$(*) \qquad z^n = 1$$

    Geben Sie die Lösungen jeweils in der Standardform $a+b\,i,\ a, b \in \mathbb{R}$ an und zeigen Sie, dass die Lösungen die Eckpunkte eines dem Einheitskreis einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks sind ($n = 3, 4$ und 5).

    Tipp für den Fall $n = 5$: Es gilt

    $$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = (z^2 + gz + 1)\left(z^2 - \frac{1}{g}\,z + 1\right) \quad \text{mit} \quad g : \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,.$$

    (6P)

22. Für $z, w \in \mathbb{C}$ sei

    $$\delta(z, w) := \begin{cases} |z - w|, & \text{falls es ein } \ \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 0 \ \text{ mit } \ z = \lambda w \ \text{ gibt} \\ |z| + |w| & \text{sonst} \end{cases}$$

    Zeigen Sie, dass durch $\delta : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ eine Metrik auf $\mathbb{C}$ definiert wird.

    Warum nennt man wohl diese Metrik gelegentlich die "Metrik des französischen Eisenbahnsystems"? (4P)

23. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

    Für $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{K}^n,\ n \in \mathbb{N}$, sei

    $$\|z\|_1 := \sum_{j=1}^{n} |z_j|,\ \|z\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2}\,,\ \|z\|_\infty := \max\{|z_j|;\ 1 \le j \le n\}\,.$$

    Beweisen Sie die Ungleichungen

    (a) $\|z\|_\infty \le \|z\|_2 \le \sqrt{n}\ \|z\|_\infty$

    (b) $\|z\|_\infty \le \|z\|_1 \le n\|z\|_\infty$ und

    (c) $\frac{1}{\sqrt{n}}\,\|z\|_1 \le \|z\|_2 \le \|z\|_1\,.$

    (4P)

24. (a) Stellen Sie eine Vermutung über den Grenzwert der Folge $(a_n) = \left(\frac{3n+1}{5n-2}\right)$ auf und versuchen Sie dann, Ihre Vermutung durch Rückgriff auf die $\varepsilon - N$-Definition zu beweisen.

(b) Ist die Folge (f_n) der Fibonacci-Zahlen (vergl. Blatt 3, Aufgabe 15) konvergent?

(c) Untersuchen Sie die komplexe Zahlenfolge (c_n) mit $c_n = \frac{1}{(1+i)^n}$ auf Konvergenz. (4P)

25.* Folgende 10 Informationen stehen Ihnen zur Verfügung:

i. Die einzigen Tiere in diesem Haus sind Katzen.
ii. Jedes Tier, das gern in den Mond starrt, ist als Schoßtier geeignet.
iii. Wenn ich ein Tier verabscheue, gehe ich ihm aus dem Weg.
iv. Es gibt keine fleischfressenden Tiere außer denen, die bei Nacht jagen.
v. Es gibt keine Katze, die nicht Mäuse tötet.
vi. Kein Tier mag mich, außer denen im Haus.
vii. Kängurus sind nicht als Schoßtiere geeignet.
viii. Nur fleischfressende Tiere töten Mäuse.
ix. Ich verabscheue Tiere, die mich nicht mögen.
x. Tiere, die bei Nacht jagen, starren gerne in den Mond.

Wenn Sie nun diese Informationen verwenden, wie sollten Sie sich gegenüber Kängurus verhalten? (4P)