Übungen zur Vorlesung Analysis I – SS 2006 Blatt 3
Dr. Rolf Busam, Dr. M. Schraudner

Internetbegleitung: http://math.uni-heidelberg.de/studinfo/schraudner/anabusam1.html
Abgabe: Freitag, 19.05.2006, 11.00 Uhr
Bitte Namen und Übungsgruppe auf den abgegebenen Blättern vermerken

---

11. Zeigen Sie, dass der durch $d(a,b) := |a-b|$ für $a, b \in \mathbb{R}$ definierte *Abstand* die folgenden Eigenschaften hat:

(M_1) : $d(a,b) \geq 0$; $d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$

(M_2) : $d(a,b) = d(b,a)$

(M_3) : $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$,

dabei sind a, b, c beliebige reelle Zahlen. Zeigen Sie ferner, dass $d(a,b) \geq 0$ aus den anderen angegebenen Eigenschaften gefolgert werden kann. Beim Beweis sollen sie nur die Eigenschaften $(a), (b), (c)$ des Betrags aus Satz 1.2.8 benutzen, nicht aber auf seine Definition zurückgreifen. (4P)

12. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn für alle $x, y \in M$ mit $x \leq y$ auch $[x, y] \subset M$ gilt.

Zeigen Sie, dass $M \subset \mathbb{R}$ genau dann konvex ist, wenn M ein Intervall (von irgendeinem Typ) ist. (4P)

13. Zeigen Sie der Reihe nach

(a) $M := \{1\} \cup \{x \in \mathbb{R};\ x \geq 2\}$ ist induktiv, also $\mathbb{N} \subset M$.

(b) Es gibt kein $m \in \mathbb{N}$ mit $1 < m < 2$.

(c) $S := \{n \in \mathbb{N};\ n - 1 \in \mathbb{N}_0\}$ ist induktiv, also ist $S = \mathbb{N}$.

(d) $T := \{n \in \mathbb{N};$ es gibt *kein* $m \in \mathbb{N}$ mit $n < m < n + 1\}$ ist induktiv, also ist $T = \mathbb{N}$.

(e) Sind $m, n \in \mathbb{N}$ und gilt $m < n$, dann ist $m + 1 \leq n$. (5P)

14. (a) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$3\left(\frac{n}{3}\right)^n \leq n\,! \leq 2\left(\frac{n}{2}\right)^n .$$

Hier können Sie die Ungleichungen $2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3$ für $n \in \mathbb{N}$ oder die Bernoullische Ungleichung benutzen.

(b) Finden Sie für die folgenden Summen ($n \in \mathbb{N}$) *jeweils* einen expliziten Ausdruck und bestätigen Sie die erhaltene Formel durch Induktion oder direkt.

i. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2$

ii. $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$

iii. $1 - 4 + 9 - \cdots + (-1)^{n+1}n^2$

(c) Sei $f_1 := f_2 := 1$ und $f_{n+2} := f_{n+1} + f_n$ für $n \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Welche Größenordnung hat f_{100}, welche f_{101}/f_{100}? (7P)

15.* Hieronymus B. Einbahn, nach dem in Heidelberg viele Straßen benannt sind, entdeckte im Jahr 1777 die Einbahninsel $TSUN - DEL$ mit n Orten ($n \in \mathbb{N}$) und genau einem Weg zwischen je zwei Orten. Die Wege waren jedoch so schmal, dass man sie nur in einer Richtung befahren konnte. $KRAO - SE$, der Herrscher der Einbahninsel, hat deshalb nur eine Fahrtrichtung zugelassen. Dennoch gelang es H. B. Einbahn unter Beachtung dieser Regel *jeden* Ort auf seiner Reise genau einmal zu besuchen. Wie hat er das angestellt? (4P)