

Übungen zur Vorlesung Analysis I – SS 2006 Blatt 2

Dr. Rolf Busam, Dr. M. Schraudner

Internetbegleitung: <http://math.uni-heidelberg.de/studinfo/schraudner/anabusam1.html>

Abgabe: Freitag, 12.05.2006, 11.00 Uhr

Bitte Namen und Übungsgruppe auf den abgegebenen Blättern vermerken

6. Bestimmen Sie explizit die folgenden Mengen

$$L_1 := \{x \in \mathbb{R}; |3 - 2x| < 5\}, \quad (1P)$$

$$L_2 := \{x \in \mathbb{R}, x \neq 2; \frac{x+4}{x-2} < x\} \quad (1P)$$

$$L_3 := \{x \in \mathbb{R}; x(2 - x) > 1 + |x|\} \quad (1P)$$

$$L_4 := \{x \in \mathbb{R}; \frac{1}{x+|x-1|} < 2\} \quad (1P)$$

und stellen Sie (wenn möglich) die Mengen L_j ($1 \leq j \leq 4$) mit Hilfe von Intervallen dar.

7. Bestimmen Sie – falls existent – jeweils Infimum und Supremum der folgenden Mengen und untersuchen Sie, ob diese Mengen jeweils ein Maximum bzw. Minimum besitzen:

$$M_1 := \{1 + (-1)^n; n \in \mathbb{N}\}; \quad M_2 := \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}; m, n \in \mathbb{N}\};$$

$$M_3 := \{x \in \mathbb{R}; x^2 + x + 1 \geq 0\}; \quad M_4 := \{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 9\}. \quad (4P).$$

8. Seien A und B nichtleere Teilmengen von \mathbb{R} und es gelte $a \leq b$ für alle $a \in A$ und alle $b \in B$. Zeigen Sie: Es gilt

$$\sup A = \inf B$$

genau dann, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\text{Zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } a \in A \text{ und ein } b \in B, \text{ so dass } b - a < \varepsilon \text{ gilt.} \quad (6P)$$

9. In der Vorlesung wurde die Existenz von Quadratwurzeln aus nichtnegativen reellen Zahlen bewiesen (im Skript Satz 1.3.2).

Zeigen Sie:

(a) Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$ gilt die Rechenregel

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}.$$

(b) Aus $0 \leq a < b$ folgt $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. (4P)

10.* Zur Logik mit "oder":

Für Carola, Friedrich, Michael, Kiki, Sarah und Thilo war das Ergebnis der letzten Mathe-Klausur recht unterschiedlich ausgefallen, weil die Noten 1,2,3,4,5 und 6 aufgetreten sind.

Folgendes ist bekannt:

- (A) Michael hatte eine "3" oder Friedrich eine "2".
- (B) Entweder Kiki oder Michael hatte die "5" geschrieben.
- (C) Carola hatte eine "1" oder eine "3".
- (D) Kiki hatte die "4" oder Sarah die "3" geschrieben.
- (E) Thilo erzielte die Traumnote "1" oder Friedrich nicht die Note "2".

Wer bekam welche Note?

Sie sollen Ihre Antwort natürlich begründen. (4P)