

# Übungen zur Vorlesung Analysis I – SS 2006 Blatt 1

Dr. Rolf Busam, Dr. M. Schraudner

Internetbegleitung: <http://math.uni-heidelberg.de/studinfo/schraudner/anabusam1.html>

Abgabe: Freitag, 05.05.2006, 11.00 Uhr

Bitte Namen und Übungsgruppe auf den abgegebenen Blättern vermerken

---

1. Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl  $n$  gilt

(a) 2 ist ein Teiler von  $n^2 - n$  (1P)

(b) 6 ist ein Teiler von  $n^5 - n$  (1P)

(c) 8 ist ein Teiler von  $((2n + 1)^2 - 1)$  (1P)

2. Beweisen Sie folgende Regeln der Bruchrechnung:

Für  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  mit  $b \neq 0$  und  $d \neq 0$  gilt

(a)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  genau dann, wenn  $ad = bc$  gilt, speziell gilt für  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0$   
 $\frac{a}{b} = \frac{ax}{bx}$ . (1P)

(b)  $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$  (1P)

(c)  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

(d)  $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$ , falls auch  $c \neq 0$  gilt (1P)

(e)  $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ , falls auch  $a \neq 0$  (1P)

3. Sei  $K := \{x \in \mathbb{R}; x = a + b\sqrt{2}, b \in \mathbb{Q}\}$ .

Zeigen Sie, dass  $K$  mit der von  $\mathbb{R}$  "geerbten" Addition bzw. Multiplikation ein Körper ist. Besitzt die Gleichung  $y^2 = 3$  in  $K$  eine Lösung? (6P)

**Bem.:** Hier können Sie benutzen, dass die Menge  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  und selbst ein Körper ist und dass es keine rationale Zahl  $r$  mit  $r^2 = 2$  gibt.  $\sqrt{2}$  ist dabei die (eindeutig bestimmte) positive (reelle) Lösung der Gleichung  $x^2 = 2$ .

4. Seien  $a$  und  $b$  positive reelle Zahlen mit  $a \leq b$ . Beweisen Sie die Ungleichungskette

$$a^2 \leq \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 \leq ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2} \leq b^2.$$

Wann gilt jeweils das Gleichheitszeichen? (4P)

5. Jäger Lustig kehrt nach erfolgreicher Jagd mit seinem Dackel Waldi von Hochsitz auf einem schnurgeraden Waldweg zum Jagdhaus zurück. Der Dackel läuft dabei dreimal so schnell wie der Jäger. Aus Vorfreude über die Wurst, die ihn im Jagdhaus erwartet, läuft Waldi zum Jagdhaus voraus, kehrt dort (blitzartig) um und läuft den Weg zurück bis er seinen Herren wieder trifft, kehrt am Treffpunkt wieder um, läuft zum Jagdhaus etc. Als Jäger Lustig am Jagdhaus ankommt hat er eine Strecke von einem km zurückgelegt. Welche Strecke hat dabei der Dackel zurückgelegt? (4P)

**Bem.:** Diese Aufgabe besitzt eine sehr einfache physikalische Lösung.

Man könnte jedoch auch auf die Idee kommen, die Wegstrecken zu betrachten, die der Dackel bis zum jeweiligen Treffpunkt mit seinem Herren zurücklegt und versuchen, daraus die gesamte zurückgelegte Strecke zu berechnen.

Bei den Lösungen der Aufgaben können Sie *alle* Ihre mathematischen Vorkenntnisse verwenden, Sie sollen jedoch Ihre Schlüsse begründen.