Markus Reiß

Kursusvorlesung *Statistik*
Wintersemester 2007/08
Universität Heidelberg

1. Übungsblatt

1. Es sei (X, Y) ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit $Y \in L^2$. Folgere aus den Eigenschaften der bedingten Erwartung, dass der Ausdruck $\mathbb{E}[(Y - g(X))^2]$ für messbare Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(X) \in L^2$ minimal ist, wenn $g(x) = \mathbb{E}[Y \mid X = x]$ $\mathbb{P}^X$-f.s. gilt.
   Tipp: Benutze $\mathbb{E}[(Y - g(X))^2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[(Y - g(X))^2 \mid X]]$.

2. Es sei (X_1, X_2) ein zweidimensionaler gemeinsam normalverteilter Zufallsvektor mit $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = 0$, $\operatorname{Var}(X_1) = \operatorname{Var}(X_2) = 1$ und $\operatorname{Cov}(X_1, X_2) =: \rho \in (-1, 1)$.
   (a) Bestimme die bedingte Dichte von X_1 gegeben $X_2 = x_2$.
   (b) Berechne $\mathbb{E}[X_1 \mid X_2]$.
   (c) Diskutiere (a) und (b) im Fall $\rho \in \{-1, +1\}$.

3. Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige $N(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen mit $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.
   (a) Bestimme den Erwartungswert von $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ und von $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$.
   (b) Weise nach, dass $\overline{X}$ und $\hat{\sigma}^2$ unabhängige Zufallsvariablen sind.
   Tipp: Zeige zunächst durch Berechnung der Korrelationen, dass der Vektor $(X_1 - \overline{X}, \dots, X_n - \overline{X})$ unabhängig von $\overline{X}$ ist.

4. Ein Gleichstrommotor erbrachte bei $n = 8$ Messungen die folgenden Werte Y_i für die Leistung (in PS) in Abhängigkeit vom Drehmoment x_i (in 1000 U/min):

x_i	0,8	1,5	2,5	3,5	4,2	4,7	5,0	5,5
Y_i	12	20	31	40	52	60	65	70

   (a) Modelliere dies als ein lineares Modell und bestimme die Regressionsgerade. Zeichne Messwerte und Regressionsgerade in ein geeignetes Koordinatensystem ein.
   (b) Bestimme anhand der Regressionsgeraden einen Schätzwert für die Leistung beim fehlenden Drehmomentwert $x = 4{,}0$.

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, dem 25.10.07.

Markus Reiß

Kursusvorlesung *Statistik*
Wintersemester 2007/08
Universität Heidelberg

2. Übungsblatt

1. Beweise für Entscheidungsregeln ρ basierend auf einem statistischen Experiment $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta})$ mit Verlustfunktion l:

   (a) Ist ρ minimax und eindeutig in dem Sinn, dass jede andere Minimax-Regel die gleiche Risikofunktion besitzt, so ist ρ zulässig.

   (b) Ist ρ zulässig mit konstanter Risikofunktion, so ist ρ minimax.

   (c) Ist ρ eine Bayesregel (bzgl. π) und eindeutig in dem Sinn, dass jede andere Bayesregel (bzgl. π) die gleiche Risikofunktion besitzt, so ist ρ zulässig.

2. Eine Krankheit kommt bei ca. $0,1\%$ der Bevölkerung vor. Ein Test zur Erkennung der Krankheit führt bei 97% der Kranken, aber auch bei 2% der Gesunden zu einer Reaktion. Auf Grund des Tests wird eine Person als krank bzw. gesund klassifiziert. Mit $\ell_0 \geqslant 0$ (bzw. $\ell_1 \geqslant 0$) werde der Verlust bei der Klassifizierung *krank* (bzw. *gesund*) eines gesunden (bzw. kranken) Patienten bewertet. Formuliere dies als Bayessches Entscheidungsproblem und gib eine Bayes-optimale Entscheidungsregel in Abhängigkeit von ℓ_0, ℓ_1 an.

3. Die Beta-Verteilung $B(a,b)$ auf $[0,1]$ ist gegeben durch die Dichte

$$f_{a,b}(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad x \in (0,1),$$

   wobei $a, b > 0$ und Γ die Gamma-Funktion bezeichnet. $B(a,b)$ hat Erwartungswert $\mu_{a,b} = \frac{a}{a+b}$ und Varianz $\sigma_{a,b}^2 = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$.

   (a) Skizziere $f_{a,b}$ für $(a,b) \in \{0.5; 1; 10\}^2$ (Computereinsatz gestattet).

   (b) Es sei eine $\mathrm{Bin}(n,p)$-verteilte math. Stichprobe X gegeben, wobei $n \geqslant 1$ bekannt ist sowie p gemäß $B(a,b)$ a priori verteilt ist. Zeige, dass die bedingte Dichte von p gegeben $X = x$ zur Beta-Verteilung $B(a+x, b+n-x)$ gehört.

   (c) Schließe, dass der Bayesschätzer unter quadratischem Risiko gegeben ist durch $\hat{p}_{a,b} = \frac{a+X}{a+b+n}$. Bestimme sein quadratisches Risiko als Funktion von p und sein zugehöriges Bayesrisiko.

4. Mittels der $\mathrm{Bin}(n,p)$-verteilten math. Stichprobe X wird der Schätzer $\hat{p} = X/n$ von p konstruiert.

   (a) Zeige, dass $\hat{p}$ erwartungstreu ist, und bestimme sein quadratisches Risiko.

   (b) Betrachte den Bayesschätzer aus 3(c) mit $a = b = \frac{\sqrt{n}}{2}$ und schließe, dass $\hat{p}$ nicht minimax ist.

   (c) Diskutiere in Abhängigkeit von n, für welche Werte von p dieser Bayesschätzer kleineres Risiko als $\hat{p}$ hat.

   (d) *freiwillig*: Beweise, dass $\hat{p}$ zulässig ist. Beweise, dass der Bayesschätzer aus 4(b) minimax ist.

Abgabe der Aufgaben 1 und 2 bei J. Kappus bis zum Montag, dem 5.11.07, der Aufgaben 3 und 4 in der Vorlesung am Donnerstag, dem 8.11.07.

Markus Reiß

Kursusvorlesung *Statistik*
Wintersemester 2007/08
Universität Heidelberg

3. Übungsblatt

1. Es sei $(X_0, X_1, \dots, X_n)$ ein gemeinsam normalverteilter Zufallsvektor im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Erwartungswertvektor $m \in \mathbb{R}^{n+1}$ und Kovarianzmatrix $\Sigma = (\sigma_{ij})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$.

   (a) Begründe, weshalb $Y_0 := X_0 - \sum_{j=1}^n \alpha_j X_j$ unabhängig von $(X_1, \dots, X_n)$ ist, wenn gilt
   $$\forall\, i = 1, \dots, n: \ \sigma_{0i} - \textstyle\sum_{j=1}^n \alpha_j \sigma_{ji} = 0.$$

   (b) Benutze $X_0 = Y_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j X_j$, um $\mathbb{E}[X_0 \,|\, X_1, \dots, X_n]$ zu berechnen.

   (c) Betrachte die $N(\mu, \tau^2)$-verteilte mathematische Stichprobe $X_1, \dots, X_n$ unter der a priori-Verteilung $\mu \sim N(0, \sigma^2)$ für $\tau, \sigma > 0$. Zeige mittels (b), dass $\hat{\mu}_{\tau,\sigma} = \frac{n\sigma^2}{n\sigma^2 + \tau^2} \bar{X}$ Bayes-optimaler Schätzer für μ unter quadratischem Verlust ist.

2. Es sei (π_n) eine Folge von a priori-Verteilungen, deren zugehörige Bayesrisiken $R_n := \inf_\rho R_{\pi_n}(\rho)$ gegen $R \geqslant 0$ konvergieren.

   (a) Beweise, dass eine Entscheidungsregel ρ mit $\sup_\vartheta R(\vartheta, \rho) = R$ minimax ist.

   (b) Betrachte die $N(\mu, E_d)$-verteilte mathematische Stichprobe $Y_1, \dots, Y_n$ mit $\mu \in \mathbb{R}^d$ unbekannt (E_d bezeichnet die Einheitsmatrix). Zeige, dass $\hat{\mu} = \bar{Y} \in \mathbb{R}^d$ ein erwartungstreuer Schätzer ist, der bezüglich dem Verlust $l(\mu, \hat{\mu}) = |\mu - \hat{\mu}|^2$ (Euklidischer Abstand) minimax ist.
   Hinweis: Bestimme den Bayesschätzer unter $\mu \sim N(0, \sigma^2 E_d)$ und verwende (a) für $\sigma \to \infty$.

3. Es sei $(\mathcal{X}, \mathscr{F}, (\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta \in \mathbb{R}})$ ein statistisches Experiment mit reellem Parameter ϑ. Als Aktionsraum betrachte $A = \mathbb{R}$ und als Verlust $\ell(\vartheta, \rho) := |\vartheta - \rho|$. Zeige, dass für a priori-Verteilungen π ein Bayesschätzer gegeben ist durch einen *a posteriori-Median* $m_\pi(x)$, d.h. so dass
   $$\tilde{\mathbb{P}}(\bar{\vartheta} \leqslant m_\pi(x) \,|\, X = x) \geqslant 1/2 \text{ und } \tilde{\mathbb{P}}(\bar{\vartheta} \geqslant m_\pi(x) \,|\, X = x) \geqslant 1/2 \quad \tilde{\mathbb{P}}^X\text{-f.ü.}$$
   gilt mit $\tilde{\mathbb{P}}(dx, d\vartheta) = P_\vartheta(dx)\pi(d\vartheta)$ sowie $\Omega = \mathcal{X} \times \Theta$ und $\bar{\vartheta}(\omega) = \vartheta$, $X(\omega) = x$ für $\omega = (x, \vartheta) \in \Omega$.
   Bemerkung: Formuliere selbst die benötigten Messbarkeitsanforderungen.

4. Es sei $X_1, \dots, X_n$ eine Poiss(λ)-verteilte mathematische Stichprobe mit $\lambda > 0$.

   (a) Schlage mindestens zwei Schätzer für λ vor, die erstrebenswerte Eigenschaften besitzen und bestimme ihr Risiko unter quadratischem Verlust.

   (b) Weise nach, dass die a posteriori-Verteilung von λ bei vorgegebener a priori-Verteilung $\lambda \sim \Gamma(a, b)$ mit $a, b > 0$ gegeben ist durch $\Gamma(a + n\bar{X}, b/(1+nb))$. Bestimme den zugehörigen Bayesschätzer und sein Risiko unter quadratischem Verlust. Ist dieser Schätzer zulässig?
   Hinweis: Die Gammaverteilung $\Gamma(a, b)$ besitzt die Dichte

$$f_{a,b}(x) = \tfrac{1}{\Gamma(a)b^a} x^{a-1} e^{-x/b}, \quad x > 0.$$

Abgabe der Aufgaben in der Vorlesung am Donnerstag, dem 15.11.07.

Markus Reiß

Kursusvorlesung *Statistik*
Wintersemester 2007/08
Universität Heidelberg

4. Übungsblatt

1. Es sei $X_1, \ldots, X_n$ eine $N(\mu, E_d)$-verteilte mathematische Stichprobe. Der James-Stein-Schätzer mit positivem Gewicht ist definiert als $\hat{\mu}_{JS+} = \big(1 - \frac{d-2}{n|\overline{X}|^2}\big)_+ \overline{X}$. Beweise für alle $d \geqslant 3$ und $\mu \in \mathbb{R}^d$ schrittweise folgenden Risikovergleich mit dem klassischen James-Stein-Schätzer:

$$\mathbb{E}_\mu[|\hat{\mu}_{JS+} - \mu|^2] < \mathbb{E}_\mu[|\hat{\mu}_{JS} - \mu|^2].$$

   (a) Die Abschätzung ist korrekt für $\mu = 0$.

   (b) Die Abschätzung folgt aus der Ungleichung $\mathbb{E}_\mu[\mu_i \overline{X}_i |G| \mathbf{1}_{\{G \leqslant 0\}}] > 0$ für $G = 1 - \frac{d-2}{n|\overline{X}|^2}$ und alle $i = 1, \ldots, d$ mit $\mu_i \neq 0$.

   (c) Für $a > 0$ und $\mu_i \neq 0$ gilt $\mathbb{E}_\mu[\mu_i \overline{X}_i \,|\, (\overline{X}_i)^2 = a^2] = a\mu_i \tanh(na\mu_i) > 0$. Dies ergibt die Ungleichung in (b) durch Einfügen einer auf $((\overline{X}_1)^2, \ldots, (\overline{X}_d)^2)$ bedingten Erwartung.

2. Betrachte ein einfaches Testproblem in der Formulierung $\Theta = A = \{0, 1\}$ und Verlust $l(0, a) = \ell_0 a$, $l(1, a) = \ell_1(1 - a)$ für Konstanten $\ell_0, \ell_1 > 0$. Charakterisiere die Eigenschaft, dass ein Test als Entscheidungsregel unverzerrt ist, mittels Fehler erster und zweiter Art.
   Bemerkung: Ein solcher Test heißt *unverfälscht*.

3. Es sei X $\mathrm{Bin}(n, \vartheta)$-verteilt mit $\vartheta \in (0, 1)$ unbekannt. Zeige, dass es auf der Basis einer Beobachtung von X keinen erwartungstreuen Schätzer von $1/\vartheta$ gibt. Gib eine möglichst große Klasse von Funktionen g an, so dass $g(\vartheta)$ nicht erwartungstreu schätzbar ist.
   Tipp: Widerspruchsbeweis.

4. In einer großen Stadt gibt es N Taxis, die die Nummern $1, \ldots, N$ tragen. Ein Passant steht einen Vormittag lang an einer Kreuzung und beobachtet die Nummern $x_1, \ldots, x_n$ an den vorbeifahrenden Taxis. Schlage ihm mindestens zwei plausible Verfahren vor, um N zu schätzen. Untersuche die Eigenschaften (insbesondere das quadratische Risiko) für die entsprechenden Schätzer im Modell einer $U([0, \vartheta])$-verteilten mathematischen Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ mit $\vartheta > 0$ unbekannt.
   1 Extrapunkt für dasjenige erwartungstreue Verfahren mit kleinstem quadratischen Risiko (unter allen Vorschlägen)!

Abgabe der Aufgaben in der Vorlesung am Donnerstag, dem 22.11.07.

Markus Reiß

Kursusvorlesung *Statistik*
Wintersemester 2007/08
Universität Heidelberg

5. Übungsblatt

1. Es seien κ, μ, ν σ-endliche Maße auf einem Messraum $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ mit $\kappa \ll \nu \ll \mu$. Beweise für die zugehörigen Radon-Nikodym-Dichten die *Kettenregel*
$$\frac{d\kappa}{d\mu}(x) = \frac{d\kappa}{d\nu}(x)\frac{d\nu}{d\mu}(x) \qquad \text{für } \mu\text{-f.a. } x \in \mathcal{X}.$$
Zeige ferner, dass aus $\nu \ll \mu$ und $\frac{d\nu}{d\mu} > 0$ μ-f.ü. folgt: $\nu \sim \mu$ sowie
$$\frac{d\mu}{d\nu} = \Big(\frac{d\nu}{d\mu}\Big)^{-1}\mathbf{1}_{\{\frac{d\nu}{d\mu}>0\}}.$$

2. Es sei $X_1, \dots, X_n$ eine $N(\mu, 1)$-verteilte mathematische Stichprobe mit $\mu \in \mathbb{R}$ unbekannt.
   (a) Gib das zugehörige statistische Experiment auf $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ an und zeige, dass es vom Produktmaß $N(0,1)^{\otimes n}$ dominiert wird.
   (b) Bestimme die Likelihoodfunktion für das dominierende Maß in (a). Welcher Wert $\mu \in \mathbb{R}$ maximiert die Likelihoodfunktion zu gegebenem $x \in \mathbb{R}^n$ (dies ist der Maximum-Likelihood-Schätzer bei Beobachtung $X = x$)?
   Tipp: Aufgabe 1.

3. Beweise oder widerlege die Aussage, dass folgende Verteilungen Exponentialfamilien bilden. Bestimme gegebenenfalls den natürlichen Parameterraum.
   (a) Multinomialverteilung $(M(p_0, \dots, p_s; n))_{0<p_i<1, \sum p_i = 1}$;
   (b) Poissonverteilung $(\mathrm{Poiss}(\lambda))_{\lambda>0}$;
   (c) Gleichmäßige Verteilung $(U([0,\vartheta]))_{\vartheta>0}$;
   (d) Gammaverteilung $(\Gamma(a,b))_{a,b>0}$.

4. Beweise: Es sei $(\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\mathcal{Z}}$ eine Exponentialfamilie mit natürlichem Parameterraum $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{R}^k$ und Darstellung
$$\frac{d\,\mathbb{P}_\vartheta}{d\mu}(x) = C(\vartheta)h(x)\exp(\langle\vartheta, T(x)\rangle) = h(x)\exp(\langle\vartheta, T(x)\rangle - A(\vartheta)),$$
wobei $A(\vartheta) = \log\big(\int h(x)\exp(\langle\vartheta, T(x)\rangle)\mu(dx)\big)$. Ist $\bar\vartheta$ ein innerer Punkt von $\mathcal{Z}$, so ist die *erzeugende Funktion* von T $\psi_{\bar\vartheta}(s) = \mathbb{E}_{\bar\vartheta}[e^{\langle T,s\rangle}]$, $s \in \mathbb{R}^k$, in einer Umgebung der Null wohldefiniert und beliebig oft differenzierbar. Es gilt $\psi_{\bar\vartheta}(s) = \exp(A(\bar\vartheta + s) - A(\bar\vartheta))$ für alle s mit $\bar\vartheta + s \in \mathcal{Z}$. Für $i, j = 1, \dots, k$ folgt $\mathbb{E}_{\bar\vartheta}[T_i] = \frac{dA}{d\vartheta_i}(\bar\vartheta)$ und $\mathrm{Cov}_{\bar\vartheta}(T_i, T_j) = \frac{d^2A}{d\vartheta_i d\vartheta_j}(\bar\vartheta)$.

Abgabe der Aufgaben in der Vorlesung am Donnerstag, dem 29.11.07.

Markus Reiß

Kursusvorlesung *Statistik*
Wintersemester 2007/08
Universität Heidelberg

6. Übungsblatt

1. Auf dem Zustandsraum $S = \{1, \dots, m\}$ wird eine Markovkette $(X_k,\ 0 \leqslant k \leqslant n)$ mit Anfangsverteilung $\mathbb{P}(X_0 = i) = q_i > 0$ und Übergangswahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X_{k+1} = j \,|\, X_k = i) = p_{ij} > 0$, $i, j \in S$, beobachtet. Wir nehmen an, dass die q_i bekannt sind, während die p_{ij} geschätzt werden sollen. Gib für das statistische Experiment auf S^{n+1} die Likelihoodfunktion bezüglich dem Zählmaß an und zeige, dass $(N_{ij})_{i,j \in S}$ mit

$$N_{ij} = |\{1 \leqslant k \leqslant n \,|\, X_{k-1} = i,\ X_k = j\}|$$

eine suffiziente Statistik bilden, d.h. $N : S^{n+1} \to \{0, \dots, n\}^{m \times m}$ mit Koordinaten N_{ij} suffizient ist. Benutze dies, um einen plausiblen Schätzer von p_{ij} zu konstruieren.

2. Beweise in Verschärfung des Satzes von Rao-Blackwell den Satz von Lehmann-Scheffé: für einen erwartungstreuen Schätzer $\hat{\gamma}$ von $\gamma(\vartheta) \in \mathbb{R}$ und eine suffiziente und vollständige Statistik T ist $\tilde{\gamma} := \mathbb{E}_\bullet[\hat{\gamma} \,|\, T]$ ein Schätzer mit gleichmäßig kleinster Varianz in der Klasse der erwartungstreuen Schätzer. Ist $\tilde{\gamma}$ der einzige Schätzer mit dieser Eigenschaft?

3. Eine suffiziente Statistik T^* heißt *minimalsuffizient*, wenn es zu jeder suffizienten Statistik T eine messbare Funktion h gibt, so dass $T^* = h(T)$ $\mathbb{P}_\vartheta$-f.s. für alle $\vartheta \in \Theta$ gilt. Beweise, dass jede suffiziente und vollständige Statistik minimalsuffizient ist, sofern eine minimalsuffiziente Statistik überhaupt existiert. Gilt auch die Umkehrung?
Hinweis: Man kann zeigen, dass minimalsuffiziente Statistiken für dominierte Experimente auf separablen Messräumen (wie $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^d})$) stets existieren.

4. Ein Physiker untersucht die Radioaktivität bei zwei verschiedenen Präparaten. Die unabhängig gemessene Zahl der Zerfälle in einer Zeiteinheit bei Präparat 1 sei $X_1, \dots, X_{m_1}$ (m_1 Messungen), bei Präparat 2 $Y_1, \dots, Y_{m_2}$ (m_2 Messungen). Gib eine vernünftige Regel an, um zu entscheiden, welches Präparat stärker radioaktiv ist. Begründe dazu, weshalb die Annahme einer Poissonverteilung gerechtfertigt ist, und gib ein Suffizienzargument.

Abgabe der Aufgaben in der Vorlesung am Donnerstag, dem 6.12.07.

Markus Reiß

Kursusvorlesung *Statistik*
Wintersemester 2007/08
Universität Heidelberg

7. Übungsblatt

1. Betrachte für das von einem σ-endlichen Maß μ dominierte statistische Modell $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \{P_{\vartheta_0}, P_{\vartheta_1}\})$ mit μ-Dichten p_0, p_1 das Testproblem $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$. Zeige:
   (a) φ ist ein Bayes-Test bezüglich 0-1-Verlust zur a-priori-Verteilung π mit $\pi(\vartheta_0) = \frac{s}{1+s}$ und $\pi(\vartheta_1) = \frac{1}{1+s}$ für festes $s \in (0, \infty)$ genau dann, wenn gilt:
   $$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & L(x) > s, \\ 0, & L(x) < s \end{cases} \quad \mu\text{-f.ü.}$$
   Hierbei ist L der Dichtequotient von P_{ϑ_1} bezüglich P_{ϑ_0} :
   $$L(x) = \frac{p_1(x)}{p_0(x)} \mathbf{1}_{\{p_0>0\}}(x) \; + \; \infty \, \mathbf{1}_{\{p_0=0, p_1>0\}}(x).$$
   (b) φ ist ein Minimax-Test genau dann, wenn gilt: Es gibt eine Zahl $s \in [0, \infty)$, so dass φ die Gestalt in (a) hat, und es gilt $E_0\varphi = 1 - E_1\varphi$.

2. Betrachte zum einfachen Testproblem $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$ den optimalen randomisierten Neyman-Pearson-Test φ_0 aus der Vorlesung mit Konstantenwahl γ und k gemäß des Beweises des Neyman-Pearson-Lemmas. Beweise: Ist $\varphi_\star$ ebenfalls ein gleichmäßig bester Test zum Niveau α, so gilt: $\varphi_\star = \varphi_0$ μ-f.ü auf $\{x \in \mathcal{X} : p_1(x) \neq kp_0(x)\}$.

3. Es sei $X_1, \ldots, X_n$ eine $U([0, \vartheta])$-verteilte mathematische Stichprobe mit $\vartheta > 0$ unbekannt. Setze $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Zeige: Für das Testproblem $H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ mit festem ϑ_0 ist jeder Test φ mit $E_{\vartheta_0}\varphi(X) = \alpha$, $E_\vartheta\varphi(X) \leq \alpha$ für alle $\vartheta \leq \vartheta_0$ und $\varphi(X) = 1$ für $\max(X_1, \ldots, X_n) > \vartheta_0$ ein gleichmäßig bester Test zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$.

4. Es sei X eine $\mathrm{Exp}(\vartheta)$-verteilte mathematische Stichprobe mit $\vartheta > 0$ unbekannt. Konstruiere einen gleichmäßig besten Test zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$ für das Testproblem $H_0 : \vartheta \leqslant 1$ gegen $H_1 : \vartheta > 1$ und gib explizit die Gütefunktion des optimalen Tests an.

Abgabe der Aufgaben in der Vorlesung am Donnerstag, dem 13.12.06.

Markus Reiß

Kursusvorlesung *Statistik*
Wintersemester 2007/08
Universität Heidelberg

8. Übungsblatt

1. Ist $(\mathcal{X}, \mathscr{F}, (\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$ ein statistisches Experiment, so ist ein Konfidenzbereich S zum Niveau $1-\alpha$ eine Abbildung $S : \mathcal{X} \to \mathscr{P}(\Theta)$, so dass die Ereignisse $\{x \in \mathcal{X} \mid \vartheta \in S(x)\}$ messbar sind und $\mathbb{P}_\vartheta(\vartheta \in S) \geqslant 1-\alpha$ für alle $\vartheta \in \Theta$ gilt. Zeige: jeder Konfidenzbereich S zum Niveau $1-\alpha$ generiert durch $\varphi_{\vartheta_0}(x) = 1-\mathbf{1}_{S(x)}(\vartheta_0)$ einen Test auf $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ zum Niveau α, und jede Familie $(\varphi_{\vartheta_0})_{\vartheta_0\in\Theta}$ von Tests auf $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ zum Niveau α generiert einen Konfidenzbereich zum Niveau $1-\alpha$.

2. Beweise das verallgemeinerte Neyman-Pearson-Lemma aus der Vorlesung. Überprüfe ferner im Satz zum zweiseitigen Testen, ob unter den Regularitätsbedingungen an η jeder unverfälschte Test die Bedingung $\mathbb{E}_{\vartheta_0}[T\varphi] = \mathbb{E}_{\vartheta_0}[\varphi]\,\mathbb{E}_{\vartheta_0}[T]$ erfüllt.

3. Es seien $X_1, \ldots, X_n$ eine $\mathrm{Exp}(\vartheta)$-verteilte mathematische Stichprobe mit $\vartheta > 0$ unbekannt sowie $\vartheta_0 > 0$. Konstruiere einen gleichmäßig besten unverfälschten Test zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ für das zweiseitige Testproblem $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$. Berechne (zumindest approximativ) die kritischen Werte im Fall $\vartheta_0 = 1$, $n = 5$, $\alpha = 0,05$.

4. Es werden die zwei mathematischen Stichproben $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Bin}(1, p_1)$ und $Y_1, \ldots, Y_m \sim \mathrm{Bin}(1, p_2)$ unabhängig beobachtet. Konstruiere einen gleichmäßig besten unverfälschten Test vom Niveau $\alpha \in (0,1)$ für das Testproblem $H_0 : p_1 = p_2$ gegen $H_1 : p_1 \neq p_2$.
   Freiwillig: Berechne numerisch die kritischen Werte für $\alpha = 0,05$, $n = 100$, $m = 100$. Vergleiche mit dem Fall $n = 150$, $m = 50$.

Abgabe der Aufgaben in der Vorlesung am Donnerstag, dem 20.12.07.

Markus Reiß

Kursusvorlesung *Statistik*
Wintersemester 2007/08
Universität Heidelberg

9. Übungsblatt

1. Es sei $X_1, \dots, X_n$ eine $\Gamma(\alpha, \beta)$-verteilte mathematische Stichprobe mit $\alpha, \beta > 0$. Bestimme mittels der ersten zwei Momente Momentenschätzer für α und β und weise ihre Konsistenz und asymptotische Normalität nach. Wie groß ist jeweils die asymptotische Varianz?

2. Begründe, warum im folgenden Ansatz ein Momentenschätzer basierend auf den ersten zwei Momenten im Allgemeinen nicht existiert:
   Stichprobenraum ist $\mathcal{X} = \mathbb{N}_0^n$ mit seiner Potenzmenge als σ-Algebra, Parametermenge $\Theta = (0,1) \times \{0,1\}$ sowie $P_{(\lambda,0)} = \mathrm{Bin}(1,\lambda)$, $P_{(\lambda,1)} = \mathrm{Poiss}(\lambda)$. Bestimme $\mathbb{E}_\vartheta[X_i^p]$ für $p = 1$ und $p = 2$ mit $\vartheta = (\lambda, j) \in \Theta$ und versuche nach ϑ aufzulösen.

3. Es sei $X_1, \dots, X_n$ mit $n \geqslant 1$ ungerade eine mathematische Stichprobe bezüglich einer Verteilungsfunktion $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit Dichte f_X.

   (a) Weise nach, dass der Stichprobenmedian von $X_1, \dots, X_n$ folgende Dichte besitzt (betrachte z.B. die Verteilungsfunktion):
   $$f_m(x) = \binom{n}{(n+1)/2} \frac{n+1}{2} f_X(x) F_X(x)^{(n-1)/2} (1 - F_X(x))^{(n-1)/2}$$

   (b) Beweise, dass der Stichprobenmedian für $n \to \infty$ konsistent und asymptotisch normalverteilt ist, sofern f_X am Medianwert nicht verschwindet.
   Tipp: Betrachte zunächst nur die $U([0,1])$-Verteilung und benutze dann allgemein $F_X(X_i) \sim U([0,1])$.

4. Bei einem radioaktiven Präparat wird auf Grund von 100 unabhängigen Messungen eine durchschnittliche Zeit von $\bar{X} = 35,3$ Sekunden zwischen zwei Zerfällen festgestellt. Modelliere dieses Experiment mit einer $\mathrm{Exp}(\lambda)$-Verteilung (Begründung!). Bestimme ein zweiseitiges (approximatives) 95%-Konfidenzintervall für λ einmal mittels der Asymptotik des Momentenschätzers, einmal mittels bester unverfälschter zweiseitiger Tests für den Exponentialfamilienparameter $1/\lambda$.

Abgabe der Aufgaben in der Vorlesung am Donnerstag, dem 17.1.08.

Markus Reiß

Kursusvorlesung *Statistik*
Wintersemester 2007/08
Universität Heidelberg

10. Übungsblatt

1. Bestimme die Maximum-Likelihood-Schätzer für eine mathematische Stichprobe $X_1, \dots, X_n$ bei folgenden zugrundeliegenden Verteilungen/Dichten und Parametern:

   (a) $N(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$;

   (b) $f_m(x) = \frac{1}{2} e^{-|x-m|}$, $x \in \mathbb{R}$, mit $m \in \mathbb{R}$.

2. Es sei $X_1, \dots, X_n$ eine $U([0,\vartheta])$-verteilte Stichprobe mit $\vartheta > 0$ unbekannt. Weise nach, dass $\hat{\vartheta}_n := \max_i X_i$ ein Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ ist und $n(\vartheta - \hat{\vartheta}_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathrm{Exp}(1/\vartheta)$ für $n \to \infty$ gilt. Ist $\hat{\vartheta}_n$ zulässig bei quadratischem Risiko?

3. Es sei $X_1, \dots, X_n$ eine mathematische Stichprobe bezüglich einer Dichte f_ϑ. Die Dichten f_ϑ, $\vartheta \in \Theta$, mögen denselben Träger $\mathrm{supp}(f_\vartheta)$ besitzen und $f_\vartheta - f_{\vartheta'} = 0$ f.ü. impliziere $\vartheta = \vartheta'$ (Identifizierbarkeit). Zeige:

   (a) Für $\vartheta \neq \vartheta_0$ gilt $\mathbb{P}_{\vartheta_0}(\prod_{i=1}^n f_{\vartheta_0}(X_i) > \prod_{i=1}^n f_\vartheta(X_i)) \to 1$ für $n \to \infty$.
   Tipp: betrachte $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(f_{\vartheta_0}(X_i)/f_\vartheta(X_i))$

   (b) Schließe bei endlichem Θ für $n \to \infty$, dass der MLE eindeutig ist mit gegen eins gehender Wahrscheinlichkeit und dass er konsistent ist.

4. Für Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ auf $(\Omega, \mathscr{F})$ wird die *Kullback-Leibler-Divergenz* (oder *relative Entropie*) definiert als

$$\mathrm{KL}(\mathbb{Q} \mid \mathbb{P}) = \begin{cases} \int_\Omega \log\left(\frac{d\,\mathbb{Q}}{d\,\mathbb{P}}(\omega)\right) \mathbb{Q}(d\omega), & \text{falls } \mathbb{Q} \ll \mathbb{P}, \\ +\infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

   (a) Zeige, dass $x \mapsto x \log(x)$ konvex ist, und schließe (benutze $d\,\mathbb{Q} = \frac{d\,\mathbb{Q}}{d\,\mathbb{P}} d\,\mathbb{P}$)

$$\mathrm{KL}(\mathbb{Q} \mid \mathbb{P}) \geqslant 0, \quad \mathrm{KL}(\mathbb{P} \mid \mathbb{P}) = 0.$$

   Folgt aus $\mathrm{KL}(\mathbb{Q} \mid \mathbb{P}) = 0$, dass $\mathbb{Q} = \mathbb{P}$ gilt?

   (b) Beweise für Produktmaße:

$$\mathrm{KL}(\mathbb{Q}^{\otimes n} \mid \mathbb{P}^{\otimes n}) = n\,\mathrm{KL}(\mathbb{Q} \mid \mathbb{P}).$$

   Was ergibt sich im Fall $\mathbb{P} = N(\mu_1, \sigma^2)$, $\mathbb{Q} = N(\mu_2, \sigma^2)$?

Abgabe der Aufgaben in der Vorlesung am Donnerstag, dem 24.1.08.

Markus Reiß

Kursusvorlesung *Statistik*
Wintersemester 2007/08
Universität Heidelberg

11. Übungsblatt

1. Es sei $X_1, \ldots, X_n$ eine mathematische Stichprobe, wobei X_i die Lebesguedichte f_ϑ mit $\vartheta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ besitze und $I(\vartheta) = \mathbb{E}_\vartheta[(\frac{d}{d\vartheta} f_\vartheta)^2 / f_\vartheta^2]$, $\vartheta \in \Theta$, existiere. Weise nach, dass unter geeigneten Voraussetzungen an die Parametrisierung für die zugehörige Fisher-Information $I_n(\vartheta)$ gilt $I_n(\vartheta) = nI(\vartheta)$.

2. Betrachte eine mathematische Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ mit Dichte $f_{\mu,\sigma}(x) = \sigma^{-1} f((x-\mu)/\sigma)$, $f \in C^1(\mathbb{R})$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ (*Lokations-Skalen-Familie*). Bestimme die Fisher-Information für die Fälle, dass (a) f bekannt und μ, σ unbekannt sowie (b) f, σ bekannt und μ unbekannt sind. Welche Annahmen garantieren, dass die jeweiligen MLE asymptotisch normalverteilt sind? Unter welcher weiteren Bedingung an f ist die asymptotische Varianz des MLE für μ unabhängig von der Kenntnis von σ?
   Hinweis: Zeige für eine symmetrische, positiv-definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$, dass $(A_{ii})^{-1} \leqslant (A^{-1})_{ii}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, gilt mit Gleichheit im Fall einer Diagonalmatrix.

3. Im nichtlinearen Regressionsmodell der Beobachtungen
   $$Y_i = f_\vartheta(i/n) + \sigma\varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n,\ f_\vartheta \in C([0,1]),\ \sigma > 0,\ (\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \text{ iid},$$
   mit $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$, $\operatorname{Var}(\varepsilon_i) = 1$, $\mathbb{E}[\varepsilon_i^4] < \infty$ betrachte den Kleinste-Quadrate-Schätzer $\hat{\vartheta}_n = \operatorname{argmin}_{\vartheta \in \Theta} \sum_{i=1}^n (Y_i - f_\vartheta(i/n))^2$. Gib Voraussetzungen für die Parametrisierung $\vartheta \mapsto f_\vartheta$ an, um auf die asymptotische Normalität von $\hat{\vartheta}_n$ für $n \to \infty$ zu schließen und bestimme die asymptotische Varianz.

4. Es sei $\Theta \subseteq \mathbb{R}^k$ kompakt sowie $(X_n(\vartheta), \vartheta \in \Theta)_{n \geqslant 1}$ eine Folge stetiger Prozesse und $(X(\vartheta), \vartheta \in \Theta)$ stetig mit $X_n(\vartheta) \xrightarrow{\mathbb{P}} X(\vartheta)$ für alle $\vartheta \in \Theta$. Beweise:
   (a) $\forall \delta > 0\ \exists U_\delta \subseteq \Theta$ endlich: $\sup_{\vartheta \in \Theta} \inf_{\vartheta' \in U_\delta} |\vartheta - \vartheta'| \leqslant \delta$.
   (b) Mit dem Stetigkeitsmodul $\omega_\delta(f) := \sup_{|\vartheta_1 - \vartheta_2| \leqslant \delta} |f(\vartheta_1) - f(\vartheta_2)|$ gilt
   $$\sup_{\vartheta \in \Theta} |X_n(\vartheta) - X(\vartheta)| \leqslant \omega_\delta(X_n) + \omega_\delta(X) + \max_{\vartheta \in U_\delta} |X_n(\vartheta) - X(\vartheta)|.$$
   (c) Es gilt $\max_{\vartheta \in U_\delta} |X_n(\vartheta) - X(\vartheta)| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ für $n \to \infty$ sowie $\omega_\delta(X) \xrightarrow{\delta \to 0} 0$.

   Schließe daraus, dass aus der Straffheitsbedingung
   $$\forall \varepsilon, \eta > 0\ \exists \delta > 0: \limsup_{n \to \infty} \mathbb{P}(\omega_\delta(X_n) \geqslant \varepsilon) \leqslant \eta$$
   die gleichmäßige Konvergenz $\sup_{\vartheta \in \Theta} |X_n(\vartheta) - X(\vartheta)| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ für $n \to \infty$ folgt.

Abgabe der Aufgaben in der Vorlesung am Donnerstag, dem 31.1.08.