Markus Reiß

Kursusvorlesung
Mathematische Statistik
Wintersemester 2006/07

1. Übungsblatt

1. Es sei (X_1, X_2) ein zweidimensionaler gemeinsam normalverteilter Zufallsvektor mit $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = 0$, $\operatorname{Var}(X_1) = \operatorname{Var}(X_2) = 1$ und $\operatorname{Cov}(X_1, X_2) =: \rho \in (-1, 1)$.
   (a) Bestimme die bedingte Dichte von X_1 gegeben $X_2 = x_2$.
   (b) Berechne $\mathbb{E}[X_1 \,|\, X_2]$.
   (c) Diskutiere (a) und (b) im Fall $\rho \in \{-1, +1\}$.

2. Es sei $(X_0, X_1, \dots, X_n)$ ein gemeinsam normalverteilter Vektor im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Erwartungswertvektor $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_n)$ und Kovarianzmatrix $\Sigma = (\sigma_{ij})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$.
   (a) Begründe, weshalb $Y_0 := X_0 - \sum_{j=1}^n \alpha_j X_j$ unabhängig von $(X_1, \dots, X_n)$ ist, wenn gilt
   $$\forall\, i = 1, \dots, n: \ \sigma_{0i} - \textstyle\sum_{j=1}^n \alpha_j \sigma_{ji} = 0.$$
   (b) Benutze $X_0 = Y_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j X_j$, um $\mathbb{E}[X_0 \,|\, X_1, \dots, X_n]$ zu berechnen.

3. Es sei $X_1, \dots, X_n$ eine $N(\mu, \sigma^2)$-verteilte mathematische Stichprobe mit $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ unbekannt.
   (a) Gib das zugehörige statistische Experiment formal an.
   (b) Bestimme den Erwartungswert von $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ und von $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$.
   (c) Weise nach, dass $\overline{X}$ und $\hat{\sigma}^2$ stochastisch unabhängig sind.

4. Ein Importeur bekommt $N = 10000$ Orangen geliefert. Den vereinbarten Preis von 1000 Euro muss er nur zahlen, wenn höchstens 5% der Orangen faul sind. Er testet $n = 50$ Orangen und reklamiert die Sendung, wenn mindestens c der Orangen faul sind. Falls die Reklamation zu unrecht erfolgt, verliert er einen guten Lieferanten, was er mit 45.000 Euro finanziellem Verlust veranschlagt. Reklamiert er jedoch nicht, obwohl insgesamt mehr als 5% Orangen faul sind, so verdient er nichts beim Weiterverkauf.
   Formuliere dies als mathematisches Entscheidungsproblem. Bestimme das zugehörige maximale Risiko approximativ und minimiere es über den Wert von c.

Abgabe von Aufgaben 1 und 2 in der Übung am Mittwoch, dem 25.10.06, und der restlichen Aufgaben in der Vorlesung am Donnerstag, dem 26.10.06.

Markus Reiß

Kursusvorlesung
Mathematische Statistik
Wintersemester 2006/07

2. Übungsblatt

1. Die Beta-Verteilung $B(a,b)$ auf $[0,1]$ ist gegeben durch die Dichte

$$f_{a,b}(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad x \in (0,1),$$

   wobei $a,b > 0$ und Γ die Gamma-Funktion bezeichnet. $B(a,b)$ hat Erwartungswert $\mu_{a,b} = \frac{a}{a+b}$ und Varianz $\sigma_{a,b}^2 = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$.

   (a) Skizziere $f_{a,b}$ für $(a,b) \in \{0.5; 1; 10\}^2$ (Computereinsatz gestattet).

   (b) Es sei eine $\mathrm{Bin}(n,p)$-verteilte math. Stichprobe X gegeben, wobei $n \geqslant 1$ bekannt ist sowie p gemäß $B(a,b)$ a priori verteilt ist. Zeige, dass die bedingte Dichte von p gegeben $X = x$ zur Beta-Verteilung $B(a+x, b+n-x)$ gehört.

   (c) Schließe, dass der Bayesschätzer unter quadratischem Risiko gegeben ist durch $\hat{p}_{a,b} = \frac{a+X}{a+b+n}$. Bestimme sein quadratisches Risiko als Funktion von p und sein zugehöriges Bayesrisiko.

2. Mittels der $\mathrm{Bin}(n,p)$-verteilten math. Stichprobe X wird der Schätzer $\hat{p} = X/n$ von p konstruiert.

   (a) Zeige, dass $\hat{p}$ erwartungstreu ist, und bestimme sein quadratisches Risiko.

   (b) Betrachte den Bayesschätzer aus 1(c) mit $a = b = \frac{\sqrt{n}}{2}$ und schließe, dass $\hat{p}$ nicht minimax ist.

   (c) Diskutiere in Abhängigkeit von n, für welche Werte von p dieser Bayesschätzer kleineres Risiko als $\hat{p}$ hat.

   (d) *freiwillig*: Beweise, dass $\hat{p}$ zulässig ist. Beweise, dass der Bayesschätzer aus 2(b) minimax ist.

Abgabe der Aufgaben in der Vorlesung am Donnerstag, dem 2.11.06.

Markus Reiß

Kursusvorlesung
Mathematische Statistik
Wintersemester 2006/07

3. Übungsblatt

1. Es sei K eine reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit gegeben X. Zeige, dass für $Y \in L^1$ gilt
$$\mathbb{E}[Y \mid X = x] = \int Y(\omega) K(x, d\omega) \ \mathbb{P}^X\text{-f.s.}$$

2. Beweise für Entscheidungsregeln ρ basierend auf einem statistischen Experiment $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta})$ mit Verlustfunktion l:
   (a) Ist ρ minimax und eindeutig in dem Sinn, dass jede andere Minimax-Regel die gleiche Risikofunktion besitzt, so ist ρ zulässig.
   (b) Ist ρ zulässig mit konstanter Risikofunktion, so ist ρ minimax.
   (c) Ist ρ eine Bayesregel (bzgl. π) und eindeutig in dem Sinn, dass jede andere Bayesregel (bzgl. π) die gleiche Risikofunktion besitzt, so ist ρ zulässig.

3. Betrachte die Parametermenge $\Theta = \{0; 1\}$ und das Testen der Hypothese $H_0 : \vartheta = 0$ gegen die Alternative $H_1 : \vartheta = 1$. Als Aktionsraum wähle $A = [0, 1]$ und als Verlust $l(\vartheta, a) := |a - \vartheta|$.
   (a) Zeige, dass der *Risikobereich* $\mathcal{R} := \{(\mathbb{E}_0[\varphi], 1 - \mathbb{E}_1[\varphi]) \mid \varphi \in \Phi\}$, wobei $\Phi := \{\varphi : \mathcal{X} \to A \text{ messbar}\}$ die Menge aller Tests bezeichnet, konvex ist und $\{(1; 0), (0; 1)\} \subseteq \mathcal{R} \subseteq [0, 1]^2$ gilt.
   (b) Beweise, dass $\mathcal{R}$ abgeschlossen ist. Dabei darf folgendes Ergebnis der Funktionalanalysis verwendet werden (Satz von Alaoglu, schwache Folgenkompaktheit): jede Folge (φ_n) in Φ besitzt eine Teilfolge (φ_{n_k}), so dass $\mathbb{E}[\varphi_{n_k} \psi] \to \mathbb{E}[\varphi \psi]$ für alle $\psi \in L^1(\mathbb{P})$ mit $\varphi \in \Phi$ geeignet.
   (c) Skizziere einen typischen Risikobereich $\mathcal{R}$ und begründe, weshalb die zulässigen Tests den Punkten am unteren Rand von $\mathcal{R}$ (zwischen $(1; 0)$ und $(0; 1)$) entsprechen sowie ein Minimaxtest dem Punkt am unteren Rand entspricht, an dem $\mathbb{E}_0[\varphi] = 1 - \mathbb{E}_1[\varphi]$ gilt.

4. Eine Krankheit kommt bei ca. $0,1\%$ der Bevölkerung vor. Ein Test zur Erkennung der Krankheit führt bei 97% der Kranken, aber auch bei 2% der Gesunden zu einer Reaktion. Auf Grund des Tests wird eine Person als krank bzw. gesund klassifiziert. Mit $\ell_0 \geqslant 0$ (bzw. $\ell_1 \geqslant 0$) werde der Verlust bei der Klassifizierung *krank* (bzw. *gesund*) eines gesunden (bzw. kranken) Patienten bewertet. Formuliere dies als Bayessches Entscheidungsproblem und gib eine Bayes-optimale Entscheidungsregel in Abhängigkeit von ℓ_0, ℓ_1 an.

Abgabe der Aufgaben in der Vorlesung am Donnerstag, dem 9.11.06.

Markus Reiß

Kursusvorlesung
Mathematische Statistik
Wintersemester 2006/07

4. Übungsblatt

1. Die Parametermenge Θ bilde einen metrischen Raum. Beweise, dass eine Bayesregel ρ_π zur a-priori-Verteilung π auf den Borelmengen von Θ unter folgenden Bedingungen zulässig ist: (a) $R_\pi(\rho_\pi) < \infty$; (b) für jede nichtleere offene Menge U in Θ gilt $\pi(U) > 0$; (c) für jede Regel ρ ist $\vartheta \mapsto R(\vartheta, \rho)$ stetig.

2. Es sei $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$ mit $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ ein statistisches Experiment. Als Verlust betrachte $\ell(\vartheta, \rho) := |\vartheta - \rho|$. Zeige, dass für a-priori-Verteilungen π ein Bayesschätzer gegeben ist durch den *a-posteriori-Median* $m_\pi(x)$, d.h. so dass
$$\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{\vartheta} \leqslant m_\pi(X) \,|\, X = x) \geqslant 1/2 \text{ und } \tilde{\mathbb{P}}(\tilde{\vartheta} \geqslant m_\pi(X) \,|\, X = x) \geqslant 1/2 \quad \tilde{\mathbb{P}}^X\text{-f.s.}$$
gilt mit $\tilde{\mathbb{P}}(d\vartheta, dx) = P_\vartheta(dx)\pi(d\vartheta)$ sowie $\Omega = \Theta \times \mathcal{X}$ und $\tilde{\vartheta}(\omega) = \omega_1$, $X(\omega) = \omega_2$ für $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$.

3. Es sei $Y_1, \ldots, Y_n$ eine $N(\mu, E_d)$-verteilte mathematische Stichprobe. Der James-Stein-Schätzer mit positivem Gewicht ist definiert als $\hat{\mu}_{JS+} = \big(1 - \frac{d-2}{n|\overline{Y}|^2}\big)_+ \overline{Y}$, wobei $x_+ := \max(x, 0)$. Beweise für alle $d \geqslant 3$ und $\mu \in \mathbb{R}^d$ schrittweise folgenden Risikovergleich mit dem klassischen James-Stein-Schätzer:
$$\mathbb{E}_\mu[|\hat{\mu}_{JS+} - \mu|^2] < \mathbb{E}_\mu[|\hat{\mu}_{JS} - \mu|^2].$$
   (a) Die Abschätzung ist korrekt für $\mu = 0$.
   (b) Die Abschätzung folgt aus der Ungleichung $\mathbb{E}_\mu[\mu_i \overline{Y}_i |G| \mathbf{1}_{\{G \leqslant 0\}}] > 0$ für $G = 1 - \frac{d-2}{n|\overline{Y}|^2}$ und alle $i = 1, \ldots, d$ mit $\mu_i \neq 0$.
   (c) Für $a > 0$ und $\mu_i \neq 0$ gilt $\mathbb{E}_\mu[\mu_i \overline{Y}_i \,|\, (\overline{Y}_i)^2 = a^2] = a\mu_i \tanh(na\mu_i) > 0$. Dies ergibt die Ungleichung in (b) durch Einfügen einer auf $((\overline{Y}_1)^2, \ldots, (\overline{Y}_d)^2)$ bedingten Erwartung.

4. In einer großen Stadt gibt es N Taxis, die die Nummern $1, \ldots, N$ tragen. Ein Passant steht einen Vormittag lang an einer Kreuzung und beobachtet die Nummern $x_1, \ldots, x_n$ (ohne Wiederholungen) an den vorbeifahrenden Taxis. Schlage ihm mindestens zwei plausible Verfahren vor, um N zu schätzen, und gib – soweit möglich – mathematische Argumente für ihre Qualität an. Berechne jeweils das quadratische Risiko.
1 Extrapunkt für dasjenige erwartungstreue Verfahren mit kleinstem quadratischen Risiko!

Abgabe der Aufgaben in der Vorlesung am Donnerstag, dem 16.11.06.

Markus Reiß

Kursusvorlesung
Mathematische Statistik
Wintersemester 2006/07

5. Übungsblatt

1. Es sei X $\mathrm{Bin}(n, 1/\vartheta)$-verteilt mit $\vartheta \geqslant 1$ unbekannt. Zeige, dass es auf der Basis einer Beobachtung von X keinen erwartungstreuen Schätzer von ϑ gibt.
   Tipp: Widerspruchsbeweis.

2. Es seien κ, μ, ν σ-endliche Maße auf einem Messraum $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ mit $\kappa \ll \nu \ll \mu$. Beweise für die zugehörigen Radon-Nikodym-Dichten die *Kettenregel*
   $$\frac{d\kappa}{d\mu}(x) = \frac{d\kappa}{d\nu}(x)\frac{d\nu}{d\mu}(x) \qquad \text{für } \mu\text{-f.a. } x \in \mathcal{X}.$$
   Zeige ferner, dass aus $\nu \ll \mu$ und $\frac{d\nu}{d\mu} > 0$ μ-f.ü. folgt: $\nu \sim \mu$ sowie
   $$\frac{d\mu}{d\nu} = \Big(\frac{d\nu}{d\mu}\Big)^{-1}\mathbf{1}_{\{\frac{d\nu}{d\mu}>0\}}.$$

3. Es sei $X_1, \ldots, X_n$ eine $N(\mu, 1)$-verteilte mathematische Stichprobe mit $\mu \in \mathbb{R}$ unbekannt.
   (a) Gib das zugehörige statistische Experiment auf $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ an und zeige, dass es vom Produktmaß $N(0,1)^{\otimes n}$ dominiert wird.
   (b) Bestimme die Likelihoodfunktion für das dominierende Maß in (a).
   Tipp: Aufgabe 2.

4. Es soll die Ein-Euro-Münze mit 1000 unabhängigen Würfen darauf getestet werden, ob sie fair ist oder nicht. Entwirf einen plausiblen unverfälschten Test, der die Hypothese $H_0 : p = 1/2$ gegen die Alternative $H_1 : p \neq 1/2$ zum Niveau $\alpha = 0.05$ testet, wobei p die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass *Kopf* oben liegt. Bestimme den Fehler zweiter Art als Funktion vom wahren Parameter p und skizziere diese Funktion.
   Hinweis: bei allen Rechnungen ist eine geeignete Approximation durch die Normalverteilung gestattet, bei der Skizze der Computereinsatz.

Abgabe der Aufgaben in der Vorlesung am Donnerstag, dem 23.11.06.

Markus Reiß

Kursusvorlesung
Mathematische Statistik
Wintersemester 2006/07

6. Übungsblatt

1. Beweise oder widerlege die Aussage, dass folgende Verteilungen Exponentialfamilien bilden. Bestimme gegebenenfalls den natürlichen Parameterraum.

   (a) Multinomialverteilung $(M(p_0,\dots,p_s;n))_{0<p_i<1,\sum p_i=1}$;

   (b) Poissonverteilung $(\mathrm{Poiss}(\lambda))_{\lambda>0}$;

   (c) Gleichmäßige Verteilung $(U([0,\vartheta]))_{\vartheta>0}$;

   (d) Gammaverteilung $(\Gamma(a,b))_{a,b>0}$.

2. Beweise: Es sei $(\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\mathcal{Z}}$ eine Exponentialfamilie mit natürlichem Parameterraum $\mathcal{Z}\subseteq\mathbb{R}^k$ und Darstellung
$$\frac{d\,\mathbb{P}_\vartheta}{d\mu}(x)=C(\vartheta)h(x)\exp(\langle\vartheta,T(x)\rangle)=h(x)\exp(\langle\vartheta,T(x)\rangle-A(\vartheta)),$$
wobei $A(\vartheta)=\log\big(\int h(x)\exp(\langle\vartheta,T(x)\rangle)\mu(dx)\big)$. Ist $\bar\vartheta$ ein innerer Punkt von $\mathcal{Z}$, so ist die *erzeugende Funktion* von T $\psi_{\bar\vartheta}(s)=\mathbb{E}_{\bar\vartheta}[e^{\langle T,s\rangle}]$, $s\in\mathbb{R}^k$, in einer Umgebung der Null wohldefiniert und beliebig oft differenzierbar. Es gilt $\psi_{\bar\vartheta}(s)=\exp(A(\bar\vartheta+s)-A(\bar\vartheta))$ für alle s mit $\bar\vartheta+s\in\mathcal{Z}$. Für $i,j=1,\dots,k$ folgt $\mathbb{E}_{\bar\vartheta}[T_i]=\frac{dA}{d\vartheta_i}(\bar\vartheta)$ und $\mathrm{Cov}_{\bar\vartheta}(T_i,T_j)=\frac{d^2A}{d\vartheta_i d\vartheta_j}(\bar\vartheta)$.

3. Auf dem Zustandsraum $S=\{1,\dots,m\}$ wird eine Markovkette $(X_k,\,0\leqslant k\leqslant n)$ mit Anfangsverteilung $\mathbb{P}(X_0=i)=q_i>0$ und Übergangswahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X_{k+1}=j\,|\,X_k=i)=p_{ij}>0$, $i,j\in S$, beobachtet. Wir nehmen an, dass die q_i bekannt sind, während die p_{ij} geschätzt werden sollen. Gib für das statistische Experiment auf S^{n+1} die Likelihoodfunktion bezüglich dem Zählmaß an und zeige, dass $(N_{ij})_{i,j\in S}$ mit
$$N_{ij}=|\{1\leqslant k\leqslant n\,|\,X_{k-1}=i,\,X_k=j\}|$$
eine suffiziente Statistik bilden, d.h. $N:S^{n+1}\to\{0,\dots,n\}^{m\times m}$ mit Koordinaten N_{ij} suffizient ist.

4. Ein Physiker untersucht die Radioaktivität bei zwei verschiedenen Präparaten. Die unabhängig gemessene Zahl der Zerfälle in einer Zeiteinheit bei Präparat 1 sei $X_1,\dots,X_{m_1}$ (m_1 Messungen), bei Präparat 2 $Y_1,\dots,Y_{m_2}$ (m_2 Messungen). Gib eine vernünftige Regel an, um zu entscheiden, welches Präparat stärker radioaktiv ist. Begründe dazu, weshalb die Annahme einer Poissonverteilung gerechtfertigt ist, und gib ein Suffizienzargument.

Abgabe der Aufgaben in der Vorlesung am Donnerstag, dem 30.11.06.

Markus Reiß

Kursusvorlesung
Mathematische Statistik
Wintersemester 2006/07

7. Übungsblatt

1. Betrachte für das von einem σ-endlichen Maß μ dominierte statistische Modell $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \{P_{\vartheta_0}, P_{\vartheta_1}\})$ mit μ-Dichten p_0, p_1 das Testproblem $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$. Zeige:
   (a) φ ist ein Bayes-Test bezüglich 0-1-Verlust zur a-priori-Verteilung π mit $\pi(\vartheta_0) = \frac{s}{1+s}$ und $\pi(\vartheta_1) = \frac{1}{1+s}$ für festes $s \in (0, \infty)$ genau dann, wenn gilt:
   $$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & L(x) > s, \\ 0, & L(x) < s \end{cases} \quad \mu\text{-f.ü.}$$
   Hierbei ist L der Dichtequotient von P_{ϑ_1} bezüglich P_{ϑ_0} :
   $$L(x) = \frac{p_1(x)}{p_0(x)} \mathbf{1}_{\{p_0 > 0\}}(x) + \infty \, \mathbf{1}_{\{p_0 = 0, p_1 > 0\}}(x).$$
   (b) φ ist ein Minimax-Test genau dann, wenn gilt: Es gibt eine Zahl $s \in [0, \infty)$, so dass φ die Gestalt in (a) hat, und es gilt $E_0\varphi = 1 - E_1\varphi$.

2. Betrachte zum einfachen Testproblem $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$ den optimalen randomisierten Neyman-Pearson-Test φ_0 aus der Vorlesung mit Konstantenwahl γ und k gemäß des Beweises des Neyman-Pearson-Lemmas. Beweise: Ist $\varphi_\star$ ebenfalls ein gleichmäßig bester Test zum Niveau α, so gilt: $\varphi_\star = \varphi_0$ μ-f.ü auf $\{x \in \mathcal{X} : p_1(x) \neq k p_0(x)\}$.

3. Es sei $X_1, \ldots, X_n$ eine $U([0, \vartheta])$-verteilte mathematische Stichprobe mit $\vartheta > 0$ unbekannt. Setze $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Zeige: Für das Testproblem $H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ mit festem ϑ_0 ist jeder Test φ mit $E_{\vartheta_0}\varphi(X) = \alpha$, $E_\vartheta \varphi(X) \leq \alpha$ für alle $\vartheta \leq \vartheta_0$ und $\varphi(X) = 1$ für $\max(X_1, \ldots, X_n) > \vartheta_0$ ein gleichmäßig bester Test zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$.

4. Es sei X eine $\text{Exp}(\vartheta)$-verteilte mathematische Stichprobe mit $\vartheta > 0$ unbekannt. Konstruiere einen gleichmäßig besten Test zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$ für das Testproblem $H_0 : \vartheta \leqslant 1$ gegen $H_1 : \vartheta > 1$ und gib explizit die Gütefunktion des optimalen Tests an.

Abgabe der Aufgaben in der Vorlesung am Donnerstag, dem 7.12.06.

Markus Reiß

Kursusvorlesung
Mathematische Statistik
Wintersemester 2006/07

8. Übungsblatt

1. Eine $(S, \mathcal{S})$-wertige Statistik T auf $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$ heißt *vollständig*, falls für alle messbaren Funktionen $f : S \to \mathbb{R}$ gilt

$$\forall\vartheta \in \Theta: \ \mathbb{E}_\vartheta[f(T)] = 0 \text{ (und existiert) } \Rightarrow \forall\vartheta \in \Theta: \ \mathbb{P}_\vartheta(f(T) = 0) = 1.$$

   Beweise in Verschärfung des Satzes von Rao-Blackwell, dass für einen erwartungstreuen Schätzer $\hat{\gamma}$ von $\gamma(\vartheta) \in \mathbb{R}$ und eine suffiziente und vollständige Statistik T gilt, dass $\tilde{\gamma} := \mathbb{E}[\hat{\gamma} \,|\, T]$ ein Schätzer mit minimalem quadratischen Risiko in der Klasse der erwartungstreuen Schätzer ist.
   (*Satz von Lehmann-Scheffé*)

2. Finde mittels Aufgabe 1 für folgende Schätzprobleme erwartungstreue Schätzer minimalen quadratischen Risikos:

   (a) Schätzung von p, wenn $X_1, \ldots, X_n$ eine $\mathrm{Bin}(1, p)$-verteilte mathematische Stichprobe ist mit $p \in (0, 1)$ unbekannt;

   (b) Schätzung von ϑ, wenn $X_1, \ldots, X_n$ eine $U([0, \vartheta])$-verteilte mathematische Stichprobe ist mit $\vartheta > 0$ unbekannt.

3. Beweise das verallgemeinerte Neyman-Pearson-Lemma aus der Vorlesung.

4. Es seien $X_1, \ldots, X_n$ eine $\mathrm{Exp}(\vartheta)$-verteilte mathematische Stichprobe mit $\vartheta > 0$ unbekannt sowie $\vartheta_0 > 0$. Konstruiere einen gleichmäßig besten unverfälschten Test zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$ für das zweiseitige Testproblem $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$. Berechne (zumindest approximativ) die kritischen Werte im Fall $\vartheta_0 = 1$, $n = 5$, $\alpha = 0,05$.

Abgabe der Aufgaben in der Vorlesung am Donnerstag, dem 14.12.06.

Markus Reiß

Kursusvorlesung
Mathematische Statistik
Wintersemester 2006/07

9. Übungsblatt

1. Beweise folgendes Korollar zum Satz vom zweiseitigen Testen: Gilt zusätzlich, dass T unter $\mathbb{P}_{\vartheta_0}$ für ein $a \in \mathbb{R}$ symmetrisch ist (d.h. $\mathbb{P}_{\vartheta_0}^{T-a} = \mathbb{P}_{\vartheta_0}^{a-T}$), dann hat ein gleichmässig bester unverfälschter Test die Form
$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & |T(x) - a| > C \\ 0, & |T(x) - a| < C \\ \gamma, & |T(x) - a| = C \end{cases}$$
Welche Bedingungen müssen C und γ erfüllen?

2. Für eine mathematische Stichprobe $X_1, \dots, X_n$ konstruiere gleichmäßig beste unverfälschte Test vom Niveau $\alpha \in (0,1)$ in folgenden Fällen:
   (a) $X_i \sim \mathrm{Bin}(1,p)$, $p_0 \in (0,1)$ und Test von $H_0 : p = p_0$ gegen $H_1 : p \neq p_0$;
   (b) $X_i \sim N(0, \sigma^2)$, $\sigma_0 > 0$ und Test von $H_0 : \sigma = \sigma_0$ gegen $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$.

   Freiwillig: Berechne numerisch die kritischen Werte für $\alpha = 0.05$, $n = 100$, $p_0 = 0,5$, $\sigma_0 = 1$.

3. Es werden die zwei mathematischen Stichproben $X_1, \dots, X_n \sim \mathrm{Bin}(1, p_1)$ und $Y_1, \dots, Y_m \sim \mathrm{Bin}(1, p_2)$ unabhängig beobachtet. Konstruiere einen gleichmäßig besten unverfälschten Test vom Niveau $\alpha \in (0,1)$ für das Testproblem $H_0 : p_1 = p_2$ gegen $H_1 : p_1 \neq p_2$.
   Freiwillig: Berechne numerisch die kritischen Werte für $\alpha = 0,05$, $n = 100$, $m = 100$. Vergleiche mit dem Fall $n = 150$, $m = 50$.

4. Es soll eine Euromünze durch n-maliges Werfen darauf getestet werden, ob sie fair ist. Zeige, dass hierfür kein gleichmäßig bester Test existiert. Konstruiere einen gleichmäßig besten unverfälschten Test vom Niveau $\alpha = 0,05$ und bestimme n so, dass die Fehlerwahrscheinlichkeit zweiter Art ca. 10% beträgt, wenn sich die Wahrscheinlichkeiten von 'Kopf' und 'Zahl' um 5% unterscheiden (Normalapproximation gestattet).

Abgabe der Aufgaben in der Vorlesung am Donnerstag, dem 21.12.06.

Markus Reiß

Kursusvorlesung
Mathematische Statistik
Wintersemester 2006/07

10. Übungsblatt

1. Ist $(\mathcal{X}, \mathscr{F}, (\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$ ein statistisches Experiment, so ist ein Konfidenzbereich S zum Niveau $1-\alpha$ eine Abbildung $S : \mathcal{X} \to \mathscr{P}(\Theta)$, so dass die Ereignisse $\{x \in \mathcal{X} \,|\, \vartheta \in S(x)\}$ messbar sind und $\mathbb{P}_\vartheta(\vartheta \in S) \geqslant 1-\alpha$ für alle $\vartheta \in \Theta$ gilt. Zeige: jeder Konfidenzbereich S zum Niveau $1-\alpha$ generiert durch $\varphi_{\vartheta_0}(x) = 1 - \mathbf{1}_{S(x)}(\vartheta_0)$ einen Test auf $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ zum Niveau α, und jede Familie $(\varphi_{\vartheta_0})_{\vartheta_0\in\Theta}$ von Tests auf $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ zum Niveau α generiert einen Konfidenzbereich zum Niveau $1-\alpha$.
   Übertrage folgende Konstruktionen der Testtheorie auf Konfidenzbereiche: Gütefunktion, gleichmäßig bester Test, unverfälschter Test, ein- und zweiseitiger Test. Bestimme ein- und zweiseitige Konfidenzintervalle zum Niveau $0,95$ für den Mittelwert im Normalverteilungsmodell bei unbekannter Varianz.

2. Es sei $X_1, \dots, X_n$ eine mathematische Stichprobe mit Verteilung $\mathbb{P}_{\mu,\sigma}$ bei unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter, aber endlicher Varianz $\sigma^2 > 0$. Zeige, dass der zweiseitige t-Test zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ für $H_0 : \mu = \mu_0$ in diesem allgemeinen Fall (bei Abweichung von der Normalverteilungsannahme) zumindest asymptotisch das Niveau einhält:
   $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\mu_0,\sigma}(|t(X_1, \dots, X_n)| \geqslant K^n_{\alpha/2}) = \alpha,$$
   wobei $K^n_{\alpha/2}$ das $\alpha/2$-Fraktil der $t(n-1)$-Verteilung ist. Anleitung:
   (a) Unter $\mathbb{P}_{\mu_0,\sigma}$ gilt $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$ und
   $$S_n \xrightarrow{\text{f.s.}} \sigma \qquad \text{mit } S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$
   (b) Verwende Slutskys Lemma aus der Wahrscheinlichkeitstheorie, um auf $t(X_1, \dots, X_n) = \sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu_0}{S_n} \xrightarrow{d} N(0,1)$ unter $\mathbb{P}_{\mu_0,\sigma}$ zu schließen.
   (c) Folgere $\lim_{n\to\infty} K^n_{\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$ (Φ: Verteilungsfunktion von $N(0,1)$) und daraus die Behauptung.

   Gilt diese *asymptotische Robustheit* auch für das Testen der Varianz, wenn $\mathbb{E}[X_i^4] < \infty$?

Abgabe der *freiwilligen* Aufgaben in der Vorlesung am Donnerstag, dem 11.1.07.
Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch!

Markus Reiß

Kursusvorlesung
Mathematische Statistik
Wintersemester 2006/07

11. Übungsblatt

1. Es bezeichne $G(\mu,\sigma)$ die Gütefunktion des zweiseitigen t-Tests zum Niveau α für die Hypothese $H_0 : \mu = 0$ bei einer $N(\mu,\sigma^2)$-verteilten mathematischen Stichprobe $X_1,\dots,X_n$.

   (a) Setze $S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\bar X)^2$ und zeige
   $$G(\mu,\sigma) = 1-\mathbb{P}_{\mu,\sigma}\Big(-\frac{K_{\alpha/2}S_n}{\sigma}-\frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}\leqslant\frac{\sqrt{n}(\bar X-\mu)}{\sigma}\leqslant\frac{K_{\alpha/2}S_n}{\sigma}-\frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}\Big).$$

   (b) Schließe durch Bedingen auf S_n/σ, dass G monoton in $|\mu|/\sigma$ wächst.

2. Sind $X_1,\dots,X_n$ unabhängig und $N(\mu,\sigma^2)$-verteilt, so sagt man, dass $\sqrt{n}\bar X/S_n$ (Notation aus Aufgabe 1) eine *nichtzentrale t-Verteilung* mit $n-1$ Freiheitsgraden und Nichtzentralitätsparameter $\delta := \sqrt{n}\mu/\sigma$ besitze. Weise nach, dass diese Verteilung durch folgende Dichte gegeben ist
   $$f_{n-1,\delta}(t) = \int_0^\infty \frac{y^{(n-2)/2}\exp\big(-y/2-\big(t\sqrt{y/(n-1)}-\delta\big)^2/2\big)}{2^{(n-2)/2}\Gamma((n-1)/2)\sqrt{\pi(n-1)}}\,dy,\quad t\in\mathbb{R}.$$
   Benutze dieses Resultat, um wiederum auf die Monotonie von G in $|\mu|/\sigma$ zu schließen.
   Freiwillig: Zeichne einige Graphen von $f_{n-1,\delta}$ und diskutiere den Einfluss der Parameter.

3. Es sei $X_1,\dots,X_n$ eine $\Gamma(\alpha,\beta)$-verteilte mathematische Stichprobe mit $\alpha,\beta > 0$. Bestimme mittels der ersten zwei Momente Momentenschätzer für α und β und weise ihre Konsistenz und asymptotische Normalität nach. Wie groß ist jeweils die asymptotische Varianz?

4. Bei einem radioaktiven Präparat wird auf Grund von 100 unabhängigen Messungen eine durchschnittliche Zeit von $\bar X = 35,3$ Sekunden zwischen zwei Zerfällen festgestellt. Modelliere dieses Experiment mit einer $\mathrm{Exp}(\lambda)$-Verteilung (Begründung!). Bestimme ein zweiseitiges (approximatives) 95%-Konfidenzintervall für λ einmal mittels der Asymptotik des Momentenschätzers, einmal mittels bester unverfälschter zweiseitiger Tests für den Exponentialfamilienparameter $1/\lambda$.

Abgabe der Aufgaben in der Vorlesung am Donnerstag, dem 18.1.07.

Markus Reiß

Kursusvorlesung
Mathematische Statistik
Wintersemester 2006/07

12. Übungsblatt

1. Es sei $X_1, \dots, X_n$ eine $N(\mu, \sigma^2)$-verteilte Stichprobe mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$ unbekannt. Zeige für die Familie von Schätzern von σ^2
$$\hat{\sigma}_\alpha^2 = \alpha \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2, \quad \alpha > 0 :$$
   (a) $\hat{\sigma}_\alpha^2$ ist für $\alpha = 1/(n-1)$ erwartungstreuer Schätzer mit minimalem quadratischen Risiko (*Tipp:* Satz von Lehmann-Scheffé).
   (b) Gibt es einen Wert α^*, so dass $\hat{\sigma}_{\alpha^*}^2$ bei quadratischem Risiko sowohl besser ist als der Schätzer in (a) als auch der MLE?

2. Beweise für eine mathematische Stichprobe $X_1, \dots, X_n$ aus einer natürlichen Exponentialfamilie $(\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta}$ und den MLE $\hat{\vartheta}_n$ von ϑ:
   (a) Für $\vartheta \in \operatorname{int}(\Theta)$ gilt $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_\vartheta^{\otimes n}(\hat{\vartheta}_n \text{ existiert}) = 1$.
   (b) Definiert man $\hat{\vartheta} = c$, c beliebig, falls der MLE nicht existiert, so gilt für diejenigen $\vartheta \in \operatorname{int}(\Theta)$, für die $I(\vartheta) := \operatorname{Cov}_\vartheta(T) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ invertierbar ist:
$$\hat{\vartheta}_n \xrightarrow{\mathbb{P}_\vartheta} \vartheta, \qquad \sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \xrightarrow{d} N(0, I^{-1}(\vartheta)) \text{ unter } \mathbb{P}_\vartheta.$$

3. Es sei $X_1, \dots, X_n$ eine $U([0, \vartheta])$-verteilte Stichprobe mit $\vartheta > 0$ unbekannt. Begründe, weshalb $\hat{\vartheta}_n = X_{(n)}$ der MLE von ϑ ist, und bestimme die asymptotischen Eigenschaften von $\hat{\vartheta}_n$ für $n \to \infty$.

4. Für Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ auf $(\Omega, \mathscr{F})$ wird die *Kullback-Leibler-Divergenz* (oder *relative Entropie*) definiert als
$$\operatorname{KL}(\mathbb{Q} \mid \mathbb{P}) = \begin{cases} \int_\Omega \log\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(\omega)\right) \mathbb{Q}(d\omega), & \text{falls } \mathbb{Q} \ll \mathbb{P}, \\ +\infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$
   (a) Zeige, dass $x \mapsto x \log(x)$ konvex ist, und schließe (benutze $d\mathbb{Q} = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} d\mathbb{P}$)
$$\operatorname{KL}(\mathbb{Q} \mid \mathbb{P}) \geqslant 0, \quad \operatorname{KL}(\mathbb{P} \mid \mathbb{P}) = 0.$$
   Folgt aus $\operatorname{KL}(\mathbb{Q} \mid \mathbb{P}) = 0$, dass $\mathbb{Q} = \mathbb{P}$ gilt?
   (b) Beweise für Produktmaße:
$$\operatorname{KL}(\mathbb{Q}^{\otimes n} \mid \mathbb{P}^{\otimes n}) = n \operatorname{KL}(\mathbb{Q} \mid \mathbb{P}).$$
   Was ergibt sich im Fall $\mathbb{P} = N(\mu_1, \sigma^2)$, $\mathbb{Q} = N(\mu_2, \sigma^2)$?

Abgabe der Aufgaben in der Vorlesung am Donnerstag, dem 25.1.07.

Markus Reiß

Kursusvorlesung
Mathematische Statistik
Wintersemester 2006/07

13. Übungsblatt

1. Es sei $X_1, \dots, X_n$ eine mathematische Stichprobe, wobei X_i die Lebesguedichte f_ϑ mit $\vartheta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ besitze und $I(\vartheta) = \mathbb{E}_\vartheta[(\frac{d}{d\vartheta} f_\vartheta)/f_\vartheta]$, $\vartheta \in \Theta$, existiere. Weise nach, dass für die zugehörige Fisher-Information $I_n(\vartheta)$ gilt $I_n(\vartheta) = nI(\vartheta)$. Weiterhin sei $\vartheta' = g(\vartheta)$ eine andere Parametrisierung mittels einer Funktion $g \in C^1(\Theta)$. Wie transformiert sich $I_n(\vartheta)$ in die zugehörige Fisher-Informationsmatrix $I_n'(\vartheta')$?

2. Betrachte eine mathematische Stichprobe $X_1, \dots, X_n$ mit Dichte $f_{\mu,\sigma}(x) = \sigma^{-1} f((x-\mu)/\sigma)$, $f \in C^1(\mathbb{R})$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ (*Lokations-Skalen-Familie*). Bestimme die Fisher-Information für die Fälle, dass (a) f bekannt und μ, σ unbekannt sowie (b) f, σ bekannt und μ unbekannt sind. Welche Annahmen garantieren, dass die jeweiligen MLE asymptotisch normalverteilt sind? Unter welcher weiteren Bedingung an f ist die asymptotische Varianz des MLE für μ unabhängig von der Kenntnis von σ?
   Hinweis: Zeige für eine symmetrische, positiv-definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$, dass $(A_{ii})^{-1} \leqslant (A^{-1})_{ii}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, gilt mit Gleichheit im Fall einer Diagonalmatrix.

3. Im nichtlinearen Regressionsmodell der Beobachtungen
$$Y_i = f_\vartheta(i/n) + \sigma\varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,\ f_\vartheta \in C([0,1]),\ \sigma > 0,\ (\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \text{ iid},$$
   mit $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = 1$ betrachte den Kleinste-Quadrate-Schätzer $\hat\vartheta_n = \operatorname{argmin}_{\vartheta \in \Theta} \sum_{i=1}^n (Y_i - f_\vartheta(i/n))^2$. Gib Voraussetzungen für die Parametrisierung $\vartheta \mapsto f_\vartheta$ an, um auf die asymptotische Normalität von $\hat\vartheta_n$ für $n \to \infty$ zu schließen und bestimme die asymptotische Varianz. Berechne $\hat\vartheta_n$ und die asymptotische Varianz konkret für das Modell $f_\vartheta(x) = \sin(2\pi(x + \vartheta))$, $\vartheta \in [0, 1)$.

4. Auf dem Zustandsraum $S = \{1, \dots, m\}$ wird eine Markovkette $(X_k, 0 \leqslant k \leqslant n)$ mit Anfangsverteilung $\mathbb{P}(X_0 = i) = q_i > 0$ und Übergangswahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X_{k+1} = j \,|\, X_k = i) = p_{ij} > 0$, $i, j \in S$, beobachtet. Wir nehmen an, dass die q_i bekannt sind, während die p_{ij} geschätzt werden sollen. Bestimme einen Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat p_{ij}$ von p_{ij}.
   freiwillig: Zeige mit einem Ergodensatz die Konsistenz der $\hat p_{ij}$ für $n \to \infty$. Gilt asymptotische Normalität?

Abgabe der Aufgaben in der Vorlesung am Donnerstag, dem 1.2.07.