Markus Reiß

Vorlesung
Wahrscheinlichkeitstheorie
Wintersemester 2005/06

1. Übungsblatt

1. Zeige, dass folgende Mengensysteme $\mathfrak{M}$ ebenfalls die Borel-σ-Algebra $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}$ des $\mathbb{R}^n$ erzeugen:

   (a) $\mathfrak{M} := \{A \subseteq \mathbb{R}^n \mid A \text{ abgeschlossen}\}$

   (b) $\mathfrak{M} := \{K \subseteq \mathbb{R}^n \mid K \text{ kompakt}\}$

   (c) $\mathfrak{M} := \{\prod_{k=1}^n [a_i, b_i] \mid a_i,\, b_i \in \mathbb{R}\}$

   (d) $\mathfrak{M} := \{\prod_{k=1}^n [a_i, b_i] \mid a_i,\, b_i \in \mathbb{Q}\}$

2. Beweise folgenden Satz:
   Eine Funktion $f = (f_1, \dots, f_n) : F \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann $(\mathcal{F}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n})$-messbar, wenn alle Koordinatenfunktionen f_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $(\mathcal{F}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$-messbar sind.
   Hinweis: Benutze für eine Richtung den Erzeuger aus 1(c).

3. Algebren und Prämaße:

   (a) Bestimme die kleinste Algebra $\mathfrak{A}$ über $\mathbb{R}$, die folgendes Mengensystem umfasst:
   $$\mathcal{I} := \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}\}.$$
   Bemerkung: $\mathcal{I}$ besitzt die Struktur eines sogenannten *Halbrings*.

   (b) Konstruiere ein Prämaß μ auf $\mathfrak{A}$, so dass $\mu((a, b]) = b - a$ für $a < b$ gilt. Ist μ eindeutig bestimmt?

4. Es seien $(X_n)_{n \geqslant 1}$ unabhängige $\{0, 1\}$-wertige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = 1/2$. Setze
   $$Y := \sum_{k=1}^{\infty} X_k 2^{-k}.$$

   (a) Begründe, weshalb Y eine Zufallsvariable ist.

   (b) Bestimme $\mathbb{P}(Y \leqslant m 2^{-n})$ für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und $m = 0, 1, \dots, 2^n$.

   (c) Schließe, dass die Verteilungsfunktion von Y mit der Verteilungsfunktion der gleichmäßigen Verteilung auf $[0, 1]$ übereinstimmt (d.h. Y ist $U[0, 1]$-verteilt).

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, dem 27.10.05.

Markus Reiß

Vorlesung
Wahrscheinlichkeitstheorie
Wintersemester 2005/06

2. Übungsblatt

1. Es sei $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra über X. Jede σ-additive Funktion $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ heißt *endliches signiertes Maß*. Zeige:

   (a) Für jedes endliche signierte Maß μ gilt $\|\mu\|_{TV} := \sup_{A \in \mathcal{F}} |\mu(A)| < \infty$.

   (b) Die endlichen signierten Maße bilden einen Vektorraum M und die Wahrscheinlichkeitsmaße eine konvexe Teilmenge von M. $\|\bullet\|_{TV}$ ist eine Norm (*Total-Variationsnorm*) auf diesem Raum.

   (c) Sind $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$ mit Dichten f bzw. g, so gilt mit $B = \{x : f(x) \geqslant g(x)\}$

   $$\|\mathbb{P} - \mathbb{Q}\|_{TV} = \mathbb{P}(B) - \mathbb{Q}(B) = \mathbb{Q}(B^C) - \mathbb{P}(B^C) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|\, dx.$$

2. Der Messraum $(\Omega, \mathcal{F})$ eines zweifachen Münzwurfs sei durch $\Omega = \{0,1\}^2$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ modelliert. $\mathcal{M}$ bestehe aus allen Ereignissen, die von höchstens einem der Münzwürfe abhängen:

   $$\mathcal{M} = \big\{\varnothing, \{(0,0),(0,1)\}, \{(1,0),(1,1)\}, \{(0,0),(1,0)\}, \{(0,1),(1,1)\}, \Omega\big\}.$$

   (a) Zeige, dass $\mathcal{M}$ die σ-Algebra $\mathcal{F}$ erzeugt, jedoch nicht $\cap$-stabil ist.

   (b) Finde zwei Wahrscheinlichkeitsmaße, die auf $\mathcal{M}$ übereinstimmen, jedoch nicht auf $\mathcal{F}$.
   Tipp: Betrachte unabhängige bzw. identische Münzwürfe.

3. Es sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^2})$. Zeige folgende Eigenschaften der zugehörigen Verteilungsfunktion $F(x,y) := \mathbb{P}((-\infty, x] \times (-\infty, y])$:

   (a) Durch die Angabe von F ist $\mathbb{P}$ eindeutig bestimmt.

   (b) Es gilt für alle $a_1 \leqslant b_1$, $a_2 \leqslant b_2$ (Skizze!)

   $$F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) = \mathbb{P}\big((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]\big) \geqslant 0.$$

   (c) Für $x^{(k)} \in \mathbb{R}^2$ mit $x_i^{(k)} \downarrow x_i$, $i = 1, 2$, für $k \to \infty$ folgt $F(x^{(k)}) \downarrow F(x)$.

   (d) $\lim_{k \to \infty} F(k,k) = 1$, $\lim_{k \to -\infty} F(k,k) = 0$.

   Bemerkung: Wie im eindimensionalen Fall kann man umgekehrt zeigen, dass jede Funktion F mit den Eigenschaften (b)-(d) ein zugehöriges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^2}$ generiert.

4. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass auf der Menge $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ der 0-1-Folgen das System der Zylindermengen $\mathfrak{A} = \{T_n \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid n \geqslant 1,\, T_n \subseteq \{0,1\}^n\}$ eine Algebra bildet. Zu gegebenem $p \in [0,1]$ setze für jedes $T_n \subseteq \{0,1\}^n$

$$\mu(T_n \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}) := \sum_{(a_1,\ldots,a_n)\in T_n} p^{\sum_i a_i}(1-p)^{n-\sum_i a_i}.$$

   (a) Zeige, dass $\mu : \mathfrak{A} \to [0,1]$ additiv ist, d.h. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für $A \cap B = \varnothing$ gilt.

   (b) Weise nach, dass μ sogar σ-additiv ist, und schließe, dass sich μ eindeutig zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \sigma(\mathfrak{A}))$ fortsetzen lässt.

   (c) Zeige: die Projektionen $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $X_n(\omega) = \omega_n$ sind unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p$.

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, dem 3.11.05.

Markus Reiß

Vorlesung
Wahrscheinlichkeitstheorie
Wintersemester 2005/06

3. Übungsblatt

1. Es sei $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ gegeben durch
$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mathbf{1}_{[1/n,\infty)}(x).$$
Zeige, dass es sich um die Verteilungsfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$ auf $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ handelt, und berechne folgende Wahrscheinlichkeiten
$$\mathbb{P}([1,\infty)),\ \mathbb{P}([1/10,\infty),\ \mathbb{P}(\{0\}),\ \mathbb{P}((-5,1/2)),\ \mathbb{P}(\mathbb{Q}).$$

2. Zufallsvariablen $X_1,\dots,X_n$ auf $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ heißen bekanntlich unabhängig, falls $\mathbb{P}(X_1 \in A_1,\dots,X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in A_i)$ für alle $A_i \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ gilt. Zeige:
   (a) $X_1,\dots,X_n$ sind bereits unabhängig, falls $\mathbb{P}(X_1 \leqslant x_1,\dots,X_n \leqslant x_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leqslant x_i)$ für alle $x_i \in \mathbb{R}$ gilt.
   Tipp: Betrachte $\mathbb{P}^{(X_1,\dots,X_n)}$ und einen $\cap$-stabilen Erzeuger von $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}$.
   (b) Besitzen X und Y Dichten f^X bzw. f^Y und sind X und Y unabhängig, so hat (X,Y) eine Dichte $f^{(X,Y)}$, die durch $f^{(X,Y)}(x,y) = f^X(x)f^Y(y)$ gegeben ist.
   (c) Gilt allgemein, dass (X,Y) eine zweidimensionale Dichte besitzt, sofern X und Y jeweils eine eindimensionale Dichte besitzen?

3. Zeige, dass die Definition des Integrals $\int f\,d\mu$ für Treppenfunktionen $f \in \mathcal{T}^+$ unabhängig von der Zerlegung ist, also aus
$$\sum_{k=1}^{m} b_k \mathbf{1}_{B_k}(x) = \sum_{\ell=1}^{n} c_\ell \mathbf{1}_{C_\ell}(x) \quad \forall\, x \in X$$
$\sum_{k=1}^m b_k \mu(B_k) = \sum_{\ell=1}^n c_\ell \mu(C_\ell)$ folgt. Was kann man auf Grund der Eigenschaft $\int f\,d\mu = 0$ über die Menge $\{f > 0\}$ aussagen?

4. Für $M \subseteq \mathbb{N}$ setze $\mu(M) := |M|$ (Kardinalität von M). Beweise:
   (a) μ ist ein σ-endliches Maß auf $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ (*Zählmaß*).
   (b) Jede Funktion $a : \mathbb{N} \to [0,\infty)$ ist messbar, und es gilt
$$\int a\,d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} a(n).$$

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, dem 10.11.05.

Markus Reiß

Vorlesung
Wahrscheinlichkeitstheorie
Wintersemester 2005/06

4. Übungsblatt

1. Beweise: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Borel-messbare und Riemann-integrierbare Funktion, so ist f Lebesgue-integrierbar, und Riemann- und Lebesgue-Integral stimmen überein. Beweisschritte:

   (a) Für jede Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ lassen sich Ober- und Untersummen schreiben als Lebesgue-Integrale $S_n^O = \int O_n \, d\lambda$, $S_n^U = \int U_n \, d\lambda$ mit
   $$O_n = \sum_{i=1}^n \Big(\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \Big) \mathbf{1}_{[x_{i-1}, x_i]}, \quad U_n = \sum_{i=1}^n \Big(\inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \Big) \mathbf{1}_{[x_{i-1}, x_i]}.$$

   (b) Für jede Folge von feiner werdenden Zerlegungen $(x_i^{(n)})_{0 \leqslant i \leqslant n}$ gilt $(O_n - U_n) \downarrow g$ mit einer Funktion $g \in \mathcal{M}^+$.

   (c) Mit dem Lemma von Fatou folgt
   $$0 \leqslant \int g \, d\lambda \leqslant \lim_{n \to \infty} (S_n^O - S_n^U) = 0,$$
   so dass $g = 0$ λ-fast überall und $U_n \uparrow f$ λ-fast überall gilt.

   (d) Unter Benutzung einer unteren Schranke für $(U_n)_{n \geqslant 1}$ folgt mittels monotoner Konvergenz $S_n^U \uparrow \int f \, d\lambda$ und damit die Behauptung.

2. Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum, $f : \Omega \to [0, \infty]$ messbar mit $\int f \, d\mu = 1$ (f *ist Dichtefunktion*) sowie $\mathbb{P}(A) := \int_A f \, d\mu$ das erzeugte Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{F}$. Beweise, dass für alle $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gilt
   $$\mathbb{E}[X] := \int X \, d\,\mathbb{P} = \int X f \, d\mu := \int X(\omega) f(\omega) \, \mu(d\omega).$$

   Tipp: Betrachte zunächst $X \in \mathcal{T}^+$ und $X \in \mathcal{M}^+$.

3. Gilt $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ für eine Zufallsvariable X, so schreibt man $X \in \mathcal{L}^p$, $p > 0$, und setzt $\|X\|_{\mathcal{L}^p} = \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p}$. Beweise, dass für Zufallsvariablen X_n aus $\|X_n - X\|_{\mathcal{L}^p} \to 0$ folgt $X_n \to X$ in Wahrscheinlichkeit (*Tipp:* Markov-Ungleichung), aber im Allgemeinen nicht die Umkehrung.
   Bemerkung: Es gilt $\mathcal{L}^p \subseteq \mathcal{L}^q$ für $p > q$, und für $p \geqslant 1$ ist $\|\bullet\|_{\mathcal{L}^p}$ eine Seminorm auf dem Vektorraum $\mathcal{L}^p$.

4. Es sei $(X_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge nicht-negativer Zufallsvariablen. Beweise:
$$\mathbb{E}\Big[\sum_{n=1}^{\infty} X_n\Big] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_n].$$
   Zeige anhand eines Gegenbeispiels, dass im Falle allgemeiner Zufallsvariablen diese Identität nicht erfüllt sein muss.

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, dem 17.11.05.

Markus Reiß

Vorlesung
Wahrscheinlichkeitstheorie
Wintersemester 2005/06

5. Übungsblatt

1. Beweise folgendes *Lemma von Scheffé*:
   Es seien $(X, \mathcal{F}, \mu)$ ein beliebiger Massraum sowie f und f_n, $n \geqslant 1$, Wahrscheinlichkeitsdichten auf X bezüglich μ. Dann folgt aus $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in X$ die Konvergenz $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{L}^1} = 0$.
   Schließe, dass für $\sigma_n \to \sigma > 0$ und $\mu_n \to \mu \in \mathbb{R}$ die Normalverteilungen $\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$ in Totalvariationsnorm (vgl. Übung 2.1) gegen $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ konvergieren.
   Hinweis: Benutze $(f_n - f)^- \leqslant f$, dominierte Konvergenz und $\int f_n d\mu = \int f d\mu$.

2. Es seien X eine Menge, $(S_i, \mathcal{S}_i)$ Messräume und $g_i : X \to S_i$ beliebige Funktionen für $i \in I$. Dann wird mit $\sigma(g_i,\, i \in I)$ die kleinste σ-Algebra über X bezeichnet, bezüglich der alle Funktion g_i messbar sind. Zeige:

   (a) $\sigma(g_i,\, i \in I)$ ist wohldefiniert.

   (b) Im Fall $I = \{1, \ldots, n\}$ und $(S_i, \mathcal{S}_i) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$ gilt unter Verwendung von $g = (g_1, \ldots, g_n) : X \to \mathbb{R}^n$
   $$\sigma(g_1, \ldots, g_n) = \{g^{-1}(B) \,|\, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\}.$$

   (c) Es bezeichne $\mathcal{G}$ die Menge aller Borel-messbaren Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(-x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann erzeugt $\mathcal{G}$ die σ-Algebra der symmetrischen Borelmengen auf $\mathbb{R}$:
   $$\sigma(g \in \mathcal{G}) = \{B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \,|\, \{-x \,|\, x \in B\} = B\}.$$

3. Auf den Messräumen $(X_i, \mathcal{F}_i)$ sei jeweils $\mathcal{E}_i$ ein Erzeuger von $\mathcal{F}_i$, $i \in I$. Weise nach, dass dann
   $$\bigcup_{i \in I} \pi_i^{-1}(\mathcal{E}_i) = \Big\{ E_i \times \prod_{j \neq i} X_j \,\Big|\, i \in I,\, E_i \in \mathcal{E}_i \Big\}$$
   ein Erzeuger der Produkt-σ-Algebra $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i$ ist. Wieso impliziert dies $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^m} \otimes \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n} = \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^{m+n}}$?

4. Es seien X und U unabhängige Zufallsvariablen und U möge gleichmäßig auf $[0, 2\pi]$ verteilt sein. Zeige mit Hilfe des Satzes von Fubini, dass $\mathbb{E}[\sin(X+U)] = 0$ gilt. Berechne ebenso $\mathbb{E}[\sum_{k=1}^{N} X_k]$ für eine $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariable N, die unabhängig von $(X_k)_{k \geqslant 1}$ ist, wobei $\mathbb{E}[N] = \mu_N < \infty$ und $\mathbb{E}[X_k] = \mu_X \in \mathbb{R}$ für alle k gelten möge.

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, dem 24.11.05.

Markus Reiß

Vorlesung
Wahrscheinlichkeitstheorie
Wintersemester 2005/06

6. Übungsblatt

1. „Ein Affe, der rein zufällig auf einer Computertastatur tippt, wird irgendwann einmal auch Goethes Faust schreiben". Formalisiere diese Weisheit und gib eine exakte mathematische Begründung mittels des Lemmas von Borell-Cantelli dafür, dass er dies mit Wahrscheinlichkeit Eins sogar unendlich oft tun wird (so er unendlich lange lebt).

2. Beweise oder widerlege für Ereignisse (A_n) die Relationen $\liminf_n A_n \subseteq \limsup_n A_n$, $(\limsup_n A_n)^C = \liminf_n(A_n^C)$, $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) \geqslant \limsup_n \mathbb{P}(A_n)$.

3. Durch $(S_n)_{n\geqslant 1}$ sei eine zufällige Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ gegeben, d.h. $S_0 := 0$, $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$ mit unabhängigen $\{-1,+1\}$-wertigen Zufallsvariablen (X_k) mit $\mathbb{P}(X_k = +1) = p \in [0,1]$. Beweise mit Begründung für jeden einzelnen Schritt:

   (a) Für $p \neq 1/2$ folgt unter Verwendung der Stirling-Formel (siehe z.B. Bauer) und des Lemmas von Borel-Cantelli $\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(S_{2n} = 0) < \infty$ sowie $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty}\{S_n = 0\}) = 0$.

   (b) Nun sei $p = 1/2$. Setzt man $A_c := \{\liminf_n n^{-1/2} S_n < -c\}$, $B_c := \{\limsup_n n^{-1/2} S_n > c\}$ für $c > 0$, so ergibt sich mittels zentralem Grenzwertsatz und der Formel $\limsup_n \mathbb{P}(Y_n > \alpha) \leqslant \mathbb{P}(\limsup_n Y_n > \alpha)$

   $$\mathbb{P}(A_c) = \mathbb{P}(B_c) \geqslant \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(n^{-1/2} S_n > c\right) > 0.$$

   Weil A_c und B_c terminale Ereignisse bezüglich (X_n) sind, folgt

   $$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = -\infty, \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \infty\right) = \lim_{c\to\infty} \mathbb{P}(A_c \cap B_c) = 1,$$

   also insbesondere $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty}\{S_n = 0\}) = 1$.

   Beachte: $\limsup_{n\to\infty}\{S_n = 0\}$ ist i.A. kein terminales Ereignis bezüglich (X_n).

4. Es sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Weise nach, dass für Zufallsvariablen auf diesem Raum $\mathbb{P}$-fast sichere und $\mathbb{P}$-stochastische Konvergenz übereinstimmen.

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, dem 1.12.05.

Markus Reiß

Vorlesung
Wahrscheinlichkeitstheorie
Wintersemester 2005/06

7. Übungsblatt

1. Betrachte $T_n = \sum_{k=1}^n \eta_k \frac{1}{k}$, wobei $(\eta_k)_{k\geqslant 1}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(\eta_k = +1) = \mathbb{P}(\eta_k = -1) = \frac{1}{2}$ ist.

   (a) Zeige, dass $(T_n)_{n\geqslant 1}$ eine Cauchyfolge in L^2 ist.

   (b) Schliesse, dass T_n $\mathbb{P}$-stochastisch gegen eine Zufallsvariable T_∞ in L^2 konvergiert.

   (c) Bestimme Erwartungswert und Varianz von T_∞.

2. Folgere aus dem in der Vorlesung bewiesenen Satz der dominierten Konvergenz folgende Verallgemeinerungen:

   (a) Konvergieren Zufallsvariablen $(X_n)_{n\geqslant 1}$ $\mathbb{P}$-fast sicher gegen eine Zufallsvariable X und gilt $\mathbb{P}(|X_n| \leqslant Y) = 1$ für ein $Y \in \mathcal{L}^1$, so folgt $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|] = 0$.

   (b) Konvergieren Zufallsvariablen $(X_n)_{n\geqslant 1}$ $\mathbb{P}$-stochastisch gegen eine Zufallsvariable X und gilt $\mathbb{P}(|X_n| \leqslant Y) = 1$ für ein $Y \in \mathcal{L}^1$, so folgt ebenfalls $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|] = 0$.

   Tipp: Benutze für (b) das Teilteilfolgenkriterium.

3. Untersuche, ob für $n \to \infty$ die Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}_n$ mit folgenden Lebesguedichten f_n auf $\mathbb{R}$ in Totalvariation, schwach oder in keinem der beiden Sinne konvergieren, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert:

$$f_n(x) = ne^{-nx}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x), \quad f_n(x) = \tfrac{n+1}{n} x^{1/n}\mathbf{1}_{[0,1]}(x), \quad f_n(x) = \tfrac{1}{n}\mathbf{1}_{[0,n]}(x).$$

4. Es seien $a \in \mathbb{R}$, $(X_n)_{n\geqslant 1}$ und X Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum sowie $\mathbb{P}(X = a) = 1$. Beweise: $X_n \xrightarrow{d} X \iff X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, dem 8.12.05.

Markus Reiß

Vorlesung
Wahrscheinlichkeitstheorie
Wintersemester 2005/06

8. Übungsblatt

1. Es seien X_n, $n \geqslant 1$, und X reellwertige Zufallsvariablen mit $X_n \xrightarrow{d} X$ sowie mit stetigen, streng monoton wachsenden Verteilungsfunktionen F_n bzw. F. Zeige:

   (a) Für die Umkehrfunktionen gilt $\lim_{n\to\infty} F_n^{-1}(u) = F^{-1}(u)$ für alle $u \in (0,1)$.

   (b) Ist U eine gleichmäßig auf $(0,1)$ verteilte Zufallsvariable, so sind X_n und $F_n^{-1}(U)$ sowie X und $F^{-1}(U)$ jeweils identisch verteilt, und es gilt $F_n^{-1}(U) \to F^{-1}(U)$ $\mathbb{P}$-fast sicher.

   Bemerkung: Dies ist ein Spezialfall der Skorokhod-Darstellung: Gilt $X_n \xrightarrow{d} X$ für Zufallsvariablen mit Werten in einem separablen metrischen Raum, so kann man einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ und Zufallsvariablen Y_n, Y auf diesem Raum so konstruieren, dass $Y_n \overset{d}{=} X_n$, $Y \overset{d}{=} X$ und $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}'\text{-f.s.}} Y$ gilt.

2. Es sei $(X_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^4$. Zeige:

   (a) $\bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ ist eine konsistente Schätzung für $\mu := \mathbb{E}[X_n]$.

   (b) $S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ ist eine konsistente Schätzung für $\sigma^2 := \operatorname{Var}(X_n)$.

   (c) Schließe mit dem zentralen Grenzwertsatz, dass $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/S_n$ in Verteilung gegen die Standardnormalverteilung konvergiert.

   (d) Das Konfidenzintervall $I_n = [\bar{X}_n - n^{-1/2}S_n z_\alpha, \bar{X}_n + n^{-1/2}S_n z_\alpha]$ für μ mit $1-\Phi(z_\alpha) = \alpha$ (Verteilungsfunktion Φ von $\mathcal{N}(0,1)$) hat das asymptotische Niveau $1-2\alpha$:
   $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\mu \in I_n) = 1 - 2\alpha.$$

   (e) *freiwillig:* Führe jeweils 1000 Simulationen für $\mathcal{N}(0,1)$- und $\operatorname{Exp}(1)$-verteilte Zufallsvariablen X_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, durch, um $\mathbb{P}(\mu \in I_n)$ in (d) mit $\alpha = 0{,}025$ für $n = 10, 20, 50, 100$ approximativ zu bestimmen.

3. Beweise mittels Markov-Ungleichung: Ist $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie reellwertiger Zufallsvariablen, so impliziert $\sup_i \mathbb{E}[|X_i|^p] < \infty$ für ein $p > 0$, dass die Verteilungen $(\mathbb{P}^{X_i})_{i\in I}$ straff sind. [kurz: L^p-Beschränktheit $\Rightarrow$ Straffheit]

4. Eine Folge $(X_n)_{n\geqslant 1}$ von Zufallsvariablen, deren Verteilungen straff sind, heißt *beschränkt in Wahrscheinlichkeit*, in Zeichen: $X_n = O_P(1)$. Man schreibt $X_n = o_P(1)$, falls $X_n = R_n Y_n$ gilt mit Zufallsvariablen $Y_n = O_P(1)$ und $R_n \to 0$ $\mathbb{P}$-stochastisch. Weise folgende Regeln nach:

   (a) $X_n = o_P(1) \iff X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$

   (b) $o_P(1) + o_P(1) = o_P(1)$

   (c) $o_P(1) + O_P(1) = O_P(1)$

   (d) $o_P(1) O_P(1) = o_P(1)$

   Die Regeln sind symbolisch zu verstehen, unter Verwendung von (a) bedeutet z.B. (b): $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, dem 15.12.05.

Markus Reiß

Vorlesung
Wahrscheinlichkeitstheorie
Wintersemester 2005/06

9. Übungsblatt

1. Beweise den Poissonschen Grenzwertsatz mit Hilfe charakteristischer Funktionen in folgenden Schritten:

   (a) Zeige, dass die charakteristischen Funktionen der Binomialverteilung Bin_{n,p_n} mit $np_n \to \lambda > 0$ für $n \to \infty$ gegen die charakteristische Funktion der Poissonverteilung mit Parameter λ konvergiert.

   (b) Weise nach, dass die Folge $(\mathrm{Bin}_{n,p_n})_{n\geqslant 1}$ straff ist, falls $np_n \to \lambda$ gilt, und folgere die schwache Konvergenz der Verteilungen Bin_{n,p_n} gegen die Poissonverteilung mit Parameter λ.

   (c) Zeige, dass bei Verteilungen auf $\mathbb{N}_0$ schwache Konvergenz die Konvergenz der Zähldichten impliziert. [Es gilt sogar Äquivalenz]

2. Mit $\Gamma(\alpha, \lambda)$ wird die Gamma-Verteilung auf $\mathbb{R}^+$ mit Lebesguedichte

   $$f_{\alpha,\lambda}(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \ (\Gamma\text{: Gamma-Funktion})$$

   und Parametern $\alpha, \lambda > 0$ bezeichnet.

   (a) Begründe, weshalb $f_{\alpha,\lambda}$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte bezüglich dem Lebesguemaß ist, und zeige (z. B. durch Potenzreihenentwicklung von e^{iux}), dass die charakteristische Funktion gegeben ist durch

   $$\varphi_{\alpha,\lambda}(u) = \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda - iu)^\alpha}, \quad u \in \mathbb{R}\,.$$

   (b) Bestimme Erwartungswert und Varianz einer $\Gamma(\alpha, \lambda)$-verteilten Zufallsvariablen.

   (c) Weise $\Gamma(\alpha_1, \lambda) * \Gamma(\alpha_2, \lambda) = \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$ nach.

   (d) Mit $\chi^2(p)$ wird die Verteilung von $|X|^2$ für einen p-dimensionalen standardnormalverteilten Zufallsvektor X bezeichnet. Zeige, dass $\chi^2(p) = \Gamma(p/2, 1/2)$ gilt.

3. *(freiwillig)* Es sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$. Dann ist ihre *erzeugende Funktion* definiert als $G_X(z) = \mathbb{E}[z^X]$. Für welche komplexen Werte z ist G_X stets wohldefiniert? Leite für die erzeugende Funktion analoge Resultate wie für charakteristische Funktionen her (Momente, Faltung, Eindeutigkeit, Grenzwertsatz).

4. *(freiwillig)* Betrachte die Menge Ω_n aller $n!$ Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$ mit der Laplaceverteilung $\mathbb{P}_n$. Für jedes $j = 1, \ldots, n$ definiere die Zufallsvariable

$$X_{n,j}(\omega) := |\{k \,|\, 1 \leqslant k \leqslant j-1,\, \omega(k) > \omega(j)\}|, \quad \omega \in \Omega_n,$$

d.h. $X_{n,j}$ zählt die durch j implizierten *Inversionen* in der Permutation ω. Zeige:

(a) $X_{n,1}, \ldots, X_{n,n}$ sind unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}_n(X_{n,j} = m) = 1/j$, $m = 0, \ldots, j-1$.

(b) $X_{n,j}$ hat Erwartungswert $(j-1)/2$ und Varianz $(j^2-1)/12$.

(c) Ist $S_n = \sum_{j=1}^n X_{n,j}$ die Gesamtzahl der Inversionen, so gilt asymptotisch

$$\frac{S_n - n^2/4}{n^{3/2}/6} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, dem 12.1.06.

Markus Reiß

Vorlesung
Wahrscheinlichkeitstheorie
Wintersemester 2005/06

10. Übungsblatt

1. Es sei (X, Y) ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit Lebesguedichte $f^{X,Y}$.

   (a) Es sei $B \subseteq \mathbb{R}$ eine Borelmenge und $x \in \mathbb{R}$ mit $f^X(x) > 0$ ($f^X(x) = \int f^{X,Y}(x, \eta)\, d\eta$). Unter welcher Voraussetzung an $f^{X,Y}$ gilt

   $$\lim_{h \downarrow 0} \mathbb{P}(Y \in B \,|\, X \in [x, x+h]) = \int_B f^{Y|X=x}(y)\, dy := \int_B \frac{f^{X,Y}(x,y)}{f^X(x)}\, dy \quad ?$$

   (b) Zeige, dass für $Y \in L^2$ und jede Lebesguedichte $f^{X,Y}$ gilt, dass

   $$\varphi_y(x) = \int y f^{Y|X=x}(y)\, dy \mathbf{1}_{\{f^X(x)>0\}}$$

   den Ausdruck $\mathbb{E}[(Y - \varphi(X))^2]$ minimiert, d.h. $\varphi_y(X) = \mathbb{E}[Y \,|\, X]$ gilt.

2. Es sei $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ eine messbare, abzählbare Partition der Grundmenge in $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Setze $\mathcal{B} := \sigma(B_n,\, n \in \mathbb{N})$. Zeige:

   (a) Jede $\mathcal{B}$-messbare Zufallsvariable X läßt sich schreiben als $X = \sum_n \alpha_n \mathbf{1}_{B_n}$ mit geeigneten $\alpha_n \in \mathbb{R}$.

   (b) Für $X \in L^1$ gilt $\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{B}] = \sum_{n:\, \mathbb{P}(B_n)>0} \left(\frac{1}{\mathbb{P}(B_n)} \int_{B_n} X \, d\,\mathbb{P}\right) \mathbf{1}_{B_n}$.

   (c) Nun sei $\Omega = [0, 1)$ mit der Borel-σ-Algebra, $\mathbb{P}$ die gleichmäßige Verteilung (also Lebesguemaß auf $[0, 1)$) und $X(\omega) := \omega$, $\omega \in [0, 1)$. Bestimme $\mathbb{E}[X \,|\, \sigma([(k-1)/n, k/n),\, k = 1, \ldots, n)]$ für $n = 1, 3, 5, 10$ und zeichne die bedingten Erwartungen zusammen mit X in ein Koordinatensystem ein.

3. Es seien X und Y gemeinsam normalverteilte Zufallsvariablen.

   (a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind X und $Y - \alpha X$ unkorreliert? (Verwende $\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X)$, $\sigma_Y^2 = \mathrm{Var}(Y)$, $\rho = Cor(X, Y)$)

   (b) Schließe, dass X und $Y - (\alpha X + \beta)$, für diese Werte α sowie $\beta \in \mathbb{R}$ beliebig, unabhängig sind und daher $\alpha X + \beta$ mit geeignetem β eine bedingte Erwartung $\mathbb{E}[Y|X]$ ist.
   Bemerkung: in diesem Fall ist die bedingte Erwartung also linear!

4. Beweise den Satz von der monotonen Konvergenz für bedingte Erwartungen:

   $$X_n \geqslant 0,\; X_n \uparrow X \Rightarrow \mathbb{E}[X_n \,|\, \mathcal{G}] \uparrow \mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{G}] \;\; \mathbb{P}-\text{f.s.}$$

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, dem 19.1.06.

Markus Reiß

Vorlesung
Wahrscheinlichkeitstheorie
Wintersemester 2005/06

11. Übungsblatt

1. Die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei *konvex*, d.h. $\varphi(ax+(1-a)y) \leqslant a\varphi(x)+(1-a)\varphi(y)$ gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$, $a \in [0,1]$. Zeige:

   (a) $D(x,y) := \frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x}$, $x \neq y$, ist monoton wachsend in x und y, woraus folgt, dass φ rechtsseitig und linksseitig differenzierbar sowie stetig ist.

   (b) Mit der rechtsseitigen Ableitung φ'_+ gilt:

   $$\begin{aligned} &\forall\, x, y \in \mathbb{R}: && \varphi(y) \geqslant \varphi(x) + \varphi'_+(x)(y-x), \\ &\forall\, x \in \mathbb{R}: && \varphi(y) = \sup_{x \in \mathbb{Q}} \big(\varphi(x) + \varphi'_+(x)(y-x)\big). \end{aligned}$$

   (c) Sind $Y, \varphi(Y) \in L^1$, so gilt $\mathbb{E}[\varphi(Y) \,|\, \mathcal{G}] \geqslant \varphi(x) + \varphi'_+(x)(\mathbb{E}[Y \,|\, \mathcal{G}] - x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

   (d) Es gilt die Jensensche Ungleichung für bedingte Erwartungen.

2. Für $Y \in L^2$ definiert man die *bedingte Varianz* von Y gegeben X als

   $$\operatorname{Var}(Y|X) := \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y \,|\, X])^2 \,|\, X].$$

   (a) Begründe, weshalb $\operatorname{Var}(Y|X)$ wohldefiniert ist.

   (b) Zeige: $\operatorname{Var}(\mathbb{E}[Y \,|\, X]) = \operatorname{Var}(Y) - \mathbb{E}[\operatorname{Var}(Y|X)] \leqslant \operatorname{Var}(Y)$.

   (c) Begründe mittels (b) für unabhängige Zufallsvariablen $(Z_k)_k$ und N in L^2 mit (Z_k) identisch verteilt und N $\mathbb{N}$-wertig:

   $$Y(\omega) := \textstyle\sum_{k=1}^{N(\omega)} Z_k(\omega) \Rightarrow \operatorname{Var}(Y) = \mathbb{E}[Z_1] \operatorname{Var}(N) + \mathbb{E}[N] \operatorname{Var}(Z_1).$$

3. *Verdopplungsstrategie*: In jeder Runde wird eine faire Münze geworfen, bei *Kopf* erhält der Spieler seinen doppelten Einsatz zurück, bei *Zahl* verliert er seinen Einsatz. Der Spieler startet mit dem Anfangskapital $K_0 = 0$. In Runde $n \geqslant 1$ verfährt er wie folgt: Ist bereits einmal Kopf erschienen, so setzt er nichts mehr; verliert er aber, so setzt er 2^{n+1} Euro für die $(n+1)$-te Runde.

   (a) Begründe, weshalb sich das Kapital K_n nach der n-ten Runde modellieren lässt mit (X_i) unabhängig, $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$, als

   $$K_n = \begin{cases} -(2^n - 1), & X_1 = \cdots = X_n = -1, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

   (b) Stelle K_n äquivalent als diskretes stochastisches Integral dar und schließe, dass (K_n) ein Martingal (bzgl. kanonischer Filtration) ist.

   (c) Beweise, dass $\lim_{n\to\infty} K_n = 1$ $\mathbb{P}$-fast sicher gilt.

4. Es sei T eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable und $S_n := \mathbf{1}_{\{n \geqslant T\}}$, $n \geqslant 0$. Zeige:

   (a) Die kanonische Filtration erfüllt $\mathcal{F}_n^S = \sigma(\{T = k\}, k = 0, \ldots, n)$.

   (b) (S_n) ist ein Submartingal bezüglich $(\mathcal{F}_n^S)_n$ mit

   $$\mathbb{E}[S_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n^S] = \mathbf{1}_{\{S_n = 1\}} + \mathbb{P}(T = n+1 \,|\, T \geqslant n+1)\mathbf{1}_{\{S_n = 0\}} \text{ } \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

   (c) Bestimme die Doobzerlegung von (S_n). Skizziere für den Fall, dass T geometrisch verteilt ist ($\mathbb{P}(T = k) = (1-p)p^k$), (S_n), seinen Kompensator und ihre Differenz als Funktion von n.

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, dem 26.1.06.

Markus Reiß

Vorlesung
Wahrscheinlichkeitstheorie
Wintersemester 2005/06

12. Übungsblatt

1. Beweise:

   (a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $\tau(\omega) = n$, $\omega \in \Omega$, eine Stoppzeit.

   (b) Sind σ und τ Stoppzeiten, so sind auch $\sigma \wedge \tau$, $\sigma \vee \tau$ und $\sigma + \tau$ Stoppzeiten. Was ist mit $\sigma - \tau$ falls $\sigma \geqslant \tau$?

2. Es sei $(\mathcal{F}_n^X)_{n \geqslant 0}$ die kanonische Filtration eines Prozesses $(X_n)_{n \geqslant 0}$. Zeige für eine endliche Stoppzeit τ bezüglich $(\mathcal{F}_n^X)$, dass gilt

$$\mathcal{F}_\tau = \sigma(\tau,\, X_{\tau \wedge n},\, n \geqslant 0).$$

   Hinweis: '$\supseteq$': zeige $\mathcal{F}_{\tau \wedge n} \subseteq \mathcal{F}_\tau$. '$\subseteq$': schreibe $A \in \mathcal{F}_\tau$ als $A = \bigcup_n A \cap \{\tau = n\}$.
   Freiwillig: Zeige sogar $\mathcal{F}_\tau = \sigma(X_{\tau \wedge n},\, n \geqslant 0)$.

3. Beweise die *Höffding-Ungleichung*: Für ein Martingal (M_n) mit $M_0 = 0$ und $|M_n(\omega) - M_{n-1}(\omega)| \leqslant K_n$, $\omega \in \Omega$, $n \geqslant 1$, gilt

$$\mathbb{P}(|M_n| \geqslant x) \leqslant 2 \exp\Big(- \frac{x^2}{2 \sum_{i=1}^n K_i^2} \Big), \quad x > 0.$$

   Anleitung:

   (a) Ist $\mathbb{E}[Z] = 0$ und $|Z| \leqslant 1$, so gilt $e^{\eta Z} \leqslant \cosh(\eta) + Z \sinh(\eta)$ und damit $\mathbb{E}[e^{\eta Z}] \leqslant \cosh(\eta) \leqslant e^{\eta^2/2}$ für alle $\eta \in \mathbb{R}$.

   (b) Es folgt $\mathbb{E}[\exp(\eta M_n) \,|\, \mathcal{F}_{n-1}] \leqslant \exp(\eta M_{n-1} + \eta^2 K_n^2/2)$.

   (c) Daraus ergibt sich induktiv $\mathbb{E}[\exp(\eta M_n)] \leqslant \exp(\eta^2 \sum_{i=1}^n K_i^2/2)$.

   (d) Die verallgemeinerte Markov-Ungleichung und Optimierung über η liefern das Ergebnis.

4. Es sei $(X_k)_{k\geqslant 1}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter und $\{-1,+1\}$-wertiger Zufallsvariablen. Unter der Hypothese H_0 gelte $\mathbb{P}_0(X_k = +1) = p_0$ mit $p_0 \in (0,1)$, unter der Alternative H_1 gelte $\mathbb{P}_1(X_k = +1) = p_1$ mit $p_1 \neq p_0$.

   (a) Begründe, weshalb der Likelihoodquotient nach n Beobachtungen $X_1, \dots, X_n$ gegeben ist durch

   $$L_n = \frac{p_1^{(n+S_n)/2}(1-p_1)^{(n-S_n)/2}}{p_0^{(n+S_n)/2}(1-p_0)^{(n-S_n)/2}} \text{ mit } S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

   (b) Zeige, dass der *Likelihood-Prozess* $(L_n)_{n\geqslant 0}$ (setze $L_0 := 1$) ein nichtnegatives Martingal bezüglich der kanonischen Filtration unter der Hypothese H_0 (d.h. unter $\mathbb{P}_0$) ist.

   (c) Ein sequentieller Likelihood-Quotiententest, basierend auf der Wahl von $0 < A < 1 < B$ und auf der Stoppzeit

   $$\tau_{A,B} := \inf\{n \geqslant 1 \,|\, L_n \geqslant B \text{ oder } L_n \leqslant A\},$$

   lehnt H_0 ab, falls $L_{\tau_{A,B}} \geqslant B$, und akzeptiert H_0, falls $L_{\tau_{A,B}} \leqslant A$. Bestimme die Fehler erster und zweiter Art dieses Tests für $p_0 = 0.4$, $p_1 = 0.6$, $A = (2/3)^5$, $B = (3/2)^5$ und berechne die im Mittel benötigte Zahl von Beobachtungen $\mathbb{E}[\tau_{A,B}]$.

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, dem 2.2.06.

Markus Reiß

Vorlesung
Wahrscheinlichkeitstheorie
Wintersemester 2005/06

13. Übungsblatt

1. Beweise: *Zufallsvariablen* $(X_i)_{i\in I}$ *in* L^1 *sind genau dann gleichgradig integrierbar, wenn gilt:* $\sup_{i\in I}\|X_i\|_{L^1} < \infty$ *und*

$$\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,\delta > 0 :\; \mathbb{P}(A) < \delta \Rightarrow \sup_{i\in I}\mathbb{E}[|X_i|\mathbf{1}_A] < \varepsilon.$$

2. Es sei $f_n(x) = (3/2)^n \sum_{k\in\{0,2\}^n} \mathbf{1}_{I(k,n)}(x)$, $x \in [0,1]$, mit den Intervallen $I(k,n) := [\sum_{i=1}^n k_i 3^{-i}, \sum_{i=1}^n k_i 3^{-i} + 3^{-n}]$. Zeige:

   (a) $(f_n)_{n\geqslant 1}$ ist ein Martingal auf $([0,1], \mathfrak{B}_{[0,1]}, \lambda, (\mathcal{F}_n))$ mit Lebesguemaß λ auf $[0,1]$ und $\mathcal{F}_n := \sigma(I(k,n),\, k \in \{0,1,2\}^n)$.

   (b) (f_n) konvergiert λ-fast sicher, aber nicht in $L^1([0,1], \mathfrak{B}_{[0,1]}, \lambda)$ (Skizze!).

   (c) Jedes f_n ist die Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}_n$. Es gibt ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_\infty$, so dass $\mathbb{P}_n \xrightarrow{w} \mathbb{P}_\infty$ ($\mathbb{P}_\infty$ heißt *Cantormaß*). Es gibt eine Borelmenge $C \subseteq [0,1]$ mit $\mathbb{P}_\infty(C) = 1$, $\lambda(C) = 0$.

---

3. Es seien $(T, \mathcal{T})$ ein Messraum, $\mathcal{E}$ ein Erzeuger von $\mathcal{T}$ und $f : S \to T$ eine beliebige Abbildung. Beweise mit dem *Prinzip der guten Mengen*, dass dann die Urbilder aus dem Erzeuger $f^{-1}(\mathcal{E})$ die Urbild-σ-Algebra $f^{-1}(\mathcal{T})$ erzeugen.

4. Es seien X und Y unabhängige reellwertige Zufallsvariablen mit Lebesguedichten f^X und f^Y. Berechne $\mathbb{E}[(Y - X)^+ \,|\, X]$. Was ergibt sich im Fall $X, Y \sim N(0,1)$?

5. Es sei $\mathrm{Exp}(\lambda)$ die Exponentialverteilung zum Parameter $\lambda > 0$. Diese hat charakteristische Funktion $\varphi_\lambda(u) = \lambda/(\lambda - iu)$.

   (a) Schließe für $\lambda_n \to \lambda > 0$ auf die schwache Konvergenz $\mathrm{Exp}(\lambda_n) \xrightarrow{w} \mathrm{Exp}(\lambda)$.

   (b) Konvergiert $\mathrm{Exp}(\lambda_n)$ ebenfalls schwach für $\lambda_n \to 0$ bzw. $\lambda_n \to \infty$?

   (c) Untersuche, wann in (a) und (b) sogar Konvergenz in Totalvariationsnorm vorliegt.

6. Hat das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ eine Dichte $f_{\mathbb{Q},\mathbb{P}}$ bezüglich dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$, so wird die *Kullback-Leibler-Divergenz* definiert als

$$\mathrm{KL}(\mathbb{Q} \mid \mathbb{P}) = \int \log(f_{\mathbb{Q},\mathbb{P}}(x)) \; \mathbb{Q}(dx).$$

(a) Zeige, dass $x \mapsto x \log(x)$ konvex ist, und schließe für den Fall $\log(f_{\mathbb{Q},\mathbb{P}}) f_{\mathbb{Q},\mathbb{P}} \in L^1(\mathbb{P})$:

$$\mathrm{KL}(\mathbb{Q} \mid \mathbb{P}) = \int_{\mathbb{R}^d} \log(f_{\mathbb{Q},\mathbb{P}}(x)) f_{\mathbb{Q},\mathbb{P}}(x) \; \mathbb{P}(dx) \geqslant 0.$$

(b) Beweise unter der Voraussetzung in (a) für Produktmaße:

$$\mathrm{KL}(\mathbb{Q}^{\otimes n} \mid \mathbb{P}^{\otimes n}) = n \, \mathrm{KL}(\mathbb{Q} \mid \mathbb{P}).$$

Aufgaben 1 und 2 sind Pflicht, Aufgaben 3 bis 6 dienen der Klausurvorbereitung. Abgabe von maximal 4 Aufgaben in der Vorlesung am Donnerstag, dem 9.2.06.