Markus Reiß

Kursusvorlesung
Stochastische Prozesse
Sommersemester 2006

1. Übungsblatt

1. Zeige: Ist X Poisson(s)- und Y Poisson(t)-verteilt und sind X und Y unabhängig, so ist $X+Y$ Poisson($t+s$)-verteilt ($t, s > 0$). Das heißt, es gilt die Eigenschaft einer Faltungshalbgruppe: $P(s) * P(t) = P(t+s)$, $s, t > 0$. Welches Maß $P(0)$ ist das neutrale Element einer Faltungshalbgruppe?

2. Es seien $U_1, \dots, U_n$ unabhängige, gleichmäßig auf $[0, t]$ verteilte Zufallsvariablen. Weise nach, dass die zugehörige Ordnungsstatistik $(U_{(1)}, \dots, U_{(n)})$ folgende gemeinsame Dichte besitzt:
$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{n!}{t^n} \mathbf{1}_{\{0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_n \leqslant t\}}, \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

3. Es seien $(N_t,\, t \geqslant 0)$ ein Poissonprozess der Intensität $\lambda > 0$ sowie $(Y_k)_{k \geqslant 1}$ eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen, unabhängig von N. Dann heißt $X_t := \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$ *zusammengesetzter Poissonprozess* ($X_t := 0$ falls $N_t = 0$).
   (a) Bestimme Erwartungswert und Varianz von X_t im Fall $Y_k \in L^2$.
   (b) Zeige, dass (X_t) unabhängige und stationäre Zuwächse besitzt.
   (c) Weise nach, dass die charakteristische Funktion von X_t gegeben ist durch (mit $\varphi^Y(u) = \mathbb{E}[e^{iuY_k}]$):
   $$\varphi^{X_t}(u) := \mathbb{E}[e^{iuX_t}] = \exp\big(t\lambda(\varphi^Y(u) - 1)\big), \quad u \in \mathbb{R}.$$

4. Die Anzahl der bis zur Zeit t an einer Bushaltestelle ankommenden Busse möge einem Poissonprozess mit Intensität λ folgen. Adam und Berta kommen beide zur Zeit t_0 an die Haltestelle und diskutieren, wie lange sie im Schnitt (=Erwartungswert) auf den nächsten Bus warten müssen.
   Adam: Da die Wartezeiten exponentialverteilt zum Parameter λ sind und die Exponentialverteilung gedächtnislos ist, ergibt sich λ^{-1}.
   Berta: Die Zeit zwischen dem Eintreffen zweier Busse ist exponentialverteilt zum Parameter λ und besitzt Erwartungswert λ^{-1}. Da im Schnitt der gleiche Zeitraum vom letzten Eintreffen eines Busses bis t_0 wie von t_0 bis zum nächsten Eintreffen verstreicht, ergibt sich $\frac{1}{2}\lambda^{-1}$ (zumindest unter der Bedingung, dass bereits ein Bus vorher eingetroffen ist).
   Wer hat recht bei diesem Wartezeit-Paradoxon?

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, dem 4.5.06.

Markus Reiß

Kursusvorlesung
Stochastische Prozesse
Sommersemester 2006

2. Übungsblatt

1. Es sei $(T_k)_{k\geqslant 1}$ eine Folge unabhängiger $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilter Zufallsvariablen. Setze $S_n := T_1+\dots+T_n$, $N_t := \sum_{n\geqslant 1} \mathbf{1}_{\{S_n\leqslant t\}}$, $X_t := \sum_{n\geqslant 1} \mathbf{1}_{\{S_n< t\}}$, $t\geqslant 0$. Beweise im Detail, dass die Prozesse X und N nicht ununterscheidbar, jedoch Versionen voneinander sind. Schließe, dass X unabhängige stationäre Zuwächse besitzt und $X_t \sim \mathrm{Poiss}(\lambda t)$ gilt.

2. Zeige, dass die endlich-dimensionalen Verteilungen einer Brownschen Bewegung B die Konsistenzbedingung aus dem Satz von Kolmogorov erfüllen. Weise ferner nach, dass mit B auch folgende Prozesse Brownsche Bewegungen sind:
$$B_t^1 := -B_t,\quad B_t^2 := a^{-1/2}B_{at},\qquad t\geqslant 0;\ a>0.$$

3. Eine Markovkette mit Zustandsraum $\mathbb{R}$ ist spezifiziert durch eine Anfangsverteilung μ^0 auf $(\mathbb{R},\mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$ und einen *Übergangskern* $P:\mathbb{R}\times\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\to[0,1]$ (d.h. $B\mapsto P(x,B)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß für alle $x\in\mathbb{R}$ und $x\mapsto P(x,B)$ messbar für alle $B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$). Zeige:

   (a) Setzt man induktiv $P^n(x,B) := \int P^{n-1}(y,B)\,P(x,dy)$ für $n\geqslant 2$ und $P^1 := P$, so ist jedes P^n wiederum ein Übergangskern.
   (P^n heißt n-Schritt-Übergangskern)

   (b) Setzt man für alle $n\geqslant 1$, $A\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{n+1}}$
   $$Q_n(A) := \int\int\cdots\int \mathbf{1}_A(x_0,x_1,\dots,x_n)P(x_{n-1},dx_n)\cdots P(x_0,dx_1)\mu^0(dx_0),$$
   so definiert $(Q_n(A))$ eine konsistente Verteilungsfamilie.

   (c) Es existiert zu jeder Anfangsverteilung μ_0 und jedem Übergangskern P ein stochastischer Prozess (die Markovkette) $(X_n,\ n\geqslant 0)$ mit $\mathbb{P}^{X_0}=\mu_0$ und $\mathbb{P}^{(X_0,\dots,X_n)} = Q_n$.

4. Beweise: Ist S ein kompakter metrischer Raum mit Borel-σ-Algebra $\mathscr{S}$ und endlichem Maß μ, so gibt es für alle $A\in\mathscr{S}$, $\varepsilon>0$ eine kompakte Menge $K\subseteq A$ und eine offene Menge $G\supseteq A$ mit $\mu(G\setminus K)<\varepsilon$.
   Tipp: Zeige, dass all solche Mengen A eine σ-Algebra bilden, die die offenen Mengen enthält (*Prinzip der guten Mengen*).

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, dem 11.5.06.

Markus Reiß

Kursusvorlesung
Stochastische Prozesse
Sommersemester 2006

3. Übungsblatt

1. Beweise: Ist $(S, \mathscr{S})$ ein mindestens zweielementiger Messraum und T eine überabzählbare Menge, so liegt keine einelementige Menge $\{(s_t)\}$, wobei $(s_t) \in S^T$, in $\mathscr{S}^{\otimes T}$.

2. Ein Gaußprozess $(X_t,\, t \in T)$ ist ein stochastischer Prozess, dessen endlich-dimensionale Verteilungen jeweils (verallgemeinert) normalverteilt sind, d.h. $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \sim N(\mu_{t_1,\ldots,t_n}, \Sigma_{t_1,\ldots,t_n})$ mit $\Sigma_{t_1,\ldots,t_n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv semi-definit. Begründe, weshalb die endlich-dimensionalen Verteilungen von X dann bereits durch Angabe der Erwartungswertfunktion $t \mapsto \mathbb{E}[X_t]$ und der Kovarianzfunktion $(s,t) \mapsto \operatorname{Cov}(X_s, X_t)$ festgelegt sind. Weise nach, dass ein Gaußprozess zu beliebig vorgegebener Erwartungswertfunktion und einer symmetrischen Kovarianzfunktion $C : T^2 \to \mathbb{R}$, für die
$$\forall n \geqslant 1;\ t_1, \ldots, t_n \in T;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} :\ \sum_{i,j=1}^{n} C(t_i, t_j)\lambda_i \lambda_j \geqslant 0$$
gilt, existiert (eine solche Funktion C heißt *positiv (semi-)definit*).

3. Ein stochastischer Prozess $(X_t,\, t \geqslant 0)$ heißt *stationär*, falls seine endlich-dimensionalen Verteilungen
$$\forall n \geqslant 1;\ t_1, \ldots, t_n \geqslant 0;\ s > 0 :\ (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+s}, \ldots, X_{t_n+s})$$
erfüllen. Gib notwendige und hinreichende Kriterien an die Erwartungswert- und Kovarianzfunktion für die Stationarität bei einem Gaußprozess an.

4. Die Brownsche Brücke $(X_t, t \in [0,1])$ ist ein zentrierter (d.h. $\mathbb{E}[X_t] = 0$) Gaußprozess mit $\operatorname{Cov}(X_s, X_t) = s(1-t)$ für $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$. Weise nach, dass die Brownsche Brücke dieselben endlich-dimensionalen Verteilungen hat wie $(B_t - tB_1,\, t \in [0,1])$, B eine Brownsche Bewegung.
Zusatzaufgabe: Zeige mittels bedingter Dichte, dass die Verteilung von X_t gleich der bedingten Verteilung von B_t gegeben $\{B_1 = 0\}$ ist.

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, dem 18.5.06.

Markus Reiß

Kursusvorlesung
Stochastische Prozesse
Sommersemester 2006

4. Übungsblatt

1. Weise nach, dass ein Gauß-Prozess $(X_t,\, t \geqslant 0)$ eine stetige Version besitzt, sofern seine Erwartungswert- und Kovarianzfunktion Hölder-stetig sind in dem Sinne, dass es $C > 0$, $\alpha > 0$ gibt mit

$$\forall\, t, s \geqslant 0: \ |\mathbb{E}[X_s] - \mathbb{E}[X_t]| + |\operatorname{Cov}(X_s, X_s) - \operatorname{Cov}(X_s, X_t)| \leqslant C|s-t|^\alpha.$$

   Schließe, dass die Brownsche Brücke eine stetige Version besitzt.

2. Es seien $X_0 \sim N(\mu, \sigma_0^2)$ und $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, $t \geqslant 1$, unabhängige Zufallsvariablen. Dann wird für $a \in \mathbb{R}$ ein *autoregressiver Prozess* X rekursiv definiert:

$$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \geqslant 1.$$

   (a) Begründe, weshalb $(X_t,\, t \in \mathbb{N}_0)$ ein Gauß-Prozess ist.

   (b) Bestimme die Erwartungswert- und Kovarianzfunktion von X.

   (c) Überprüfe für welche Parameterwerte $a, \mu, \sigma_0^2, \sigma^2$ der autoregressive Prozess stationär ist.

   (d) Simuliere einige Realisierungen von $(X_t,\, 0 \leqslant t \leqslant 100)$ für $\mu = 0$, $\sigma_0^2 = \sigma^2 = 1$ und $a \in \{0; -0,5; 1; -2\}$.

3. Es sei $(X_n,\, n \geqslant 0)$ eine Markovkette mit Zustandsraum $\mathbb{R}$, Übergangskern P und Anfangsverteilung μ. Es möge

$$\forall\, A \in \mathfrak{B}_\mathbb{R}: \ \int P(x, A)\, \mu(dx) = \mu(A)$$

   gelten (μ heißt dann *invariantes Maß* oder *stationäre Anfangsverteilung*).

   (a) Zeige, dass dann auch für die n-Schritt-Übergangskerne P^n gilt

$$\forall\, A \in \mathfrak{B}_\mathbb{R}: \ \int P^n(x, A)\, \mu(dx) = \mu(A),$$

   und schließe, dass X_n für alle $n \geqslant 0$ gemäß μ verteilt ist.

   (b) Beweise, dass X sogar ein stationärer Prozess ist.

   (c) Wie ordnet sich der obige autoregressive Prozess in diesen Rahmen ein?

4. Beweise folgende Aussagen für die invariante σ-Algebra $\mathscr{I}_T$ zu einer maßerhaltenden Transformation T:

   (a) Eine Zufallsvariable Y ist genau dann $\mathscr{I}_T$-messbar, wenn sie $\mathbb{P}$-fast sicher invariant ist, d.h. $Y \circ T = Y$ $\mathbb{P}$-f.s. gilt. Insbesondere ist T ergodisch genau dann, wenn jede $\mathbb{P}$-fast sicher invariante und beschränkte Zufallsvariable fast sicher konstant ist.

   (b) Zu jedem invarianten Ereignis $A \in \mathscr{I}_T$ existiert ein strikt invariantes Ereignis B (also $T^{-1}(B) = B$ exakt) mit $\mathbb{P}(A \Delta B) = 0$.

Abgabe in der Übung am Dienstag, dem 30.5.06.
Achtung: Für den Übungsschein muss im Semester mindestens eine Simulationsaufgabe erledigt werden!

Markus Reiß

Kursusvorlesung
Stochastische Prozesse
Sommersemester 2006

5. Übungsblatt

1. Zeige für eine maßerhaltende Abbildung T und eine Zufallsvariable $X \in L^1$:
$$\mathbb{E}[X \circ T \mid \mathscr{I}_T] = \mathbb{E}[X \mid \mathscr{I}_T].$$

2. Beweise folgenden Satz: Eine maßerhaltende Abbildung T auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist genau dann ergodisch, wenn für alle $A, B \in \mathcal{F}$ gilt
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(A \cap T^{-k} B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$
Tipp: Wende für eine Richtung einen Ergodensatz auf $\mathbf{1}_B$ an.

3. Es sei $(X_n,\, n \geqslant 0)$ ein reellwertiger ergodischer Prozess, kanonisch konstruiert auf $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}^{\otimes \mathbb{N}_0}, \mathbb{P})$ (d.h. der zugehörige Linksshift T ist maßerhaltend und ergodisch). Zeige:
   (a) Für jedes $m \geqslant 1$ ist auch der $\mathbb{R}^2$-wertige Prozess $((X_n, X_{n+m}),\, n \geqslant 0)$ ergodisch.
   (b) Sofern X_n in L^2 liegt, sind folgende Schätzer von Erwartungswert $\mathbb{E}[X_0]$ und Kovarianz $\operatorname{Cov}(X_0, X_m)$ konsistent (für $n \to \infty$):
$$\hat{\mu}_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k, \quad \hat{C}_n(m) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-m-1} X_k X_{k+m} - \hat{\mu}_n^2.$$

4. *Gelfands Problem:* Kommt in der Dezimaldarstellung der Zweierpotenzen je die Anfangsziffer 7 vor? Untersuche dies wie folgt:
   (a) Bestimme die relativen Häufigkeiten der Anfangsziffern von $(2^n)_{1\leqslant n\leqslant 20}$.
   (b) Es sei $A \sim U([0,1])$. Zeige, dass die relativen Häufigkeiten der Anfangsziffer k in $(10^A 2^n)_{1\leqslant n \leqslant m}$ für $m \to \infty$ fast sicher gegen $\log_{10}(k+1) - \log_{10}(k)$ konvergiert (betrachte $X_n = A + n\log_{10}(2) \mod 1$!).
   (c) Zeige, dass die Konvergenz in (b) sogar überall vorliegt, insbesondere die relative Häufigkeit der Anfangsziffer 7 in den Zweierpotenzen gegen $\log_{10}(8/7) \approx 0,058$ konvergiert.
   Hinweis: Zeige für trigonometrische Polynome $p(a) = \sum_{|m|\leqslant M} c_m e^{2\pi i m a}$, dass $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} p(a + k\eta) \to \int_0^1 p(x)dx$ für alle $\eta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $a \in [0,1]$ gilt (rechne zunächst explizit für Monome!) und approximiere dann geeignet.

Abgabe in der Übung am Dienstag, dem 6.6.06.

Markus Reiß

Kursusvorlesung
Stochastische Prozesse
Sommersemester 2006

6. Übungsblatt

1. Es sei $\mathfrak{B}_C$ die Borel-σ-Algebra des Raumes $(C([0,T],\mathbb{R}), \|\bullet\|_\infty)$ sowie $\pi_t : C([0,T],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$, die Projektion $\pi_t(x) := x(t)$. Weise nach:
$$\mathfrak{B}_C = \sigma(\pi_t,\, t \in [0,T]).$$

2. Für $k = 1, \dots, K$ sei $(\mu_n^{(k)})$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_\mathbb{R})$ mit $\mu_n^{(k)} \xrightarrow{w} \mu^{(k)}$. Zeige:
$$\mu_n^{(1)} \otimes \cdots \otimes \mu_n^{(K)} \xrightarrow{w} \mu^{(1)} \otimes \cdots \otimes \mu^{(K)}.$$

3. Es sei $(S_n,\, n \geqslant 0)$ eine symmetrische Irrfahrt, also $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ mit unabhängigen Zufallsvariablen X_i und $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$.
   (a) Begründe, weshalb $\tau_a := \inf\{n \geqslant 0 \,|\, S_n = a\}$ für $a \in \mathbb{N}$ eine Stoppzeit bezüglich der kanonischen Filtration $(\mathcal{F}_n^S)$ ist.
   (b) Beweise für $a \in \mathbb{N}$ das *Spiegelungsprinzip* (Skizze!):
   $\mathbb{P}(S_n > a) = \mathbb{P}(S_n > a,\, \tau_a < n) = \mathbb{P}(S_n < a,\, \tau_a < n)$.
   (c) Schließe, dass für die Verteilung von $M_n = \max\{S_0, \dots, S_n\}$ gilt:
   $$\mathbb{P}(M_n \geqslant a) = \mathbb{P}(\tau_a \leqslant n) = \mathbb{P}(S_n = a) + 2\,\mathbb{P}(S_n > a).$$

4. Es sei $(B_t,\, t \geqslant 0)$ eine Brownsche Bewegung. Zeige:
$$\limsup_{\delta \to 0} \max_{0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, t-s \leqslant \delta} \frac{|B_t - B_s|}{\sqrt{2\delta \log(1/\delta)}} \geqslant 1 \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$
   Insbesondere sind die Pfade der Brownschen Bewegung $\mathbb{P}$-f.s. nicht 1/2-Hölder-stetig. Anleitung:
   (a) Für $\vartheta \in (0,1)$, $n \geqslant 1$ gilt mit $\xi_n > 0$ derart, dass $\inf_n \xi_n 2^{n(1-\vartheta)} > 0$:
   $$\mathbb{P}\Big(\max_{1 \leqslant j \leqslant 2^n} \frac{|B_{j2^{-n}} - B_{(j-1)2^{-n}}|}{\sqrt{2^{1-n}\log(2^n)}} \leqslant \sqrt{1-\vartheta} \Big) \leqslant (1-\xi_n)^{2^n} \leqslant e^{-\xi_n 2^n}.$$
   (b) Schließe mit dem Lemma von Borel-Cantelli, dass
   $$\mathbb{P}\Big(\exists\, n_0 \geqslant 1 \forall n \geqslant n_0 : \max_{1 \leqslant j \leqslant 2^n} \frac{|B_{j2^{-n}} - B_{(j-1)2^{-n}}|}{\sqrt{2^{1-n}\log(2^n)}} > \sqrt{1-\vartheta} \Big) = 1$$
   gilt, und betrachte $\vartheta_m \downarrow 0$.

   Zusatzaufgabe: Zeige $\limsup_{\delta \to 0} \max_{0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, t-s \leqslant \delta} \frac{|B_t - B_s|}{\sqrt{2\delta \log(1/\delta)}} = 1$ $\mathbb{P}$-f.s.

Abgabe in der Übung am Dienstag, dem 13.6.06.

Markus Reiß

Kursusvorlesung
Stochastische Prozesse
Sommersemester 2006

7. Übungsblatt

1. Betrachte den Raum $C(\mathbb{R}^+) = \{f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ sowie $d(f,g) := \sum_{n\geqslant 1} 2^{-n} \min(\max_{0\leqslant t\leqslant n}|f(t)-g(t)|, 1)$. Weise nach, dass d eine Metrik auf $C(\mathbb{R}^+)$ ist, bezüglich der $C(\mathbb{R}^+)$ vollständig ist.

2. Es sei $(B_t,\, t \geqslant 0)$ eine Brownsche Bewegung sowie $M_t = \max_{0\leqslant s\leqslant t} B_s$ ihr Maximum bis zur Zeit $t > 0$. Zeige:

   (a) Für $a \leqslant b$, $b \geqslant 0$ gilt: $\mathbb{P}(B_t \leqslant a,\, M_t \geqslant b) = \mathbb{P}(B_t \geqslant 2b - a, M_t \geqslant b) = \mathbb{P}(B_t \geqslant 2b - a)$.

   (b) B_t und M_t haben die gemeinsame Dichte
   $$f^{(B_t,M_t)}(x,y) = \tfrac{2(2y-x)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-(2y-x)^2/2t} \mathbf{1}_{\{x\leqslant y,\, y\geqslant 0\}}.$$

   (c) M_t, $|B_t|$ und $M_t - B_t$ sind identisch verteilt.

3. Es seien $X_1,\dots,X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit stetiger Verteilungsfunktion F. Betrachte die Kolmogorov-Statistik $T_n = \sqrt{n}\sup_{x\in\mathbb{R}}|F_n(x) - F(x)|$.

   (a) Weise nach, dass die Verteilung von T_n unabhängig von F ist.

   (b) Aus der Vorlesung ist $T_n \xrightarrow{d} K$ bekannt, wobei K Kolmogorov-verteilt ist, d.h. $\mathbb{P}(K \leqslant x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^j \exp(-2j^2x^2)\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$. Bestimme daraus numerisch das Quantil $c_{0.05}^{\infty}$, so dass $\mathbb{P}(T_n > c_{0.05}^{\infty}) \approx 0,05$ für große n gilt.

   (c) Simuliere für $n = 5$, $n = 20$ und $n = 100$ jeweils 1000-mal die Werte T_n für gleichmäßig auf $[0,1]$ verteilte Zufallsvariablen $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Vergleiche $c_{0.05}^{\infty}$ aus (b) jeweils mit dem empirischen Quantil $c_{0.05}^{n}$, das gerade unterhalb von 5% der simulierten Größen T_n liegt.

4. Es bezeichne $(M_n,\, n \geqslant 0)$ ein Martingal sowie $(X_n,\, n \geqslant 1)$ einen $(\mathcal{F}_n^M)$-vorhersehbaren Prozess, d.h. X_n ist $\sigma(M_k,\, k \leqslant n-1)$-messbar. Betrachte $(X \circ M)_n := \sum_{i=1}^n X_i(M_i - M_{i-1})$, $(X \circ M)_0 := 0$. Zeige:

   (a) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $\tau_k = \inf\{n \geqslant 0 \,|\, |X_{n+1}| > k\}$ eine $(\mathcal{F}_n^M)$-Stoppzeit mit $\tau_k \uparrow \infty$ f.s. für $k \uparrow \infty$.

   (b) Der gestoppte Prozess $(X \circ M)_n^{\tau_k} := (X \circ M)_{n\wedge\tau_k}$, $n \geqslant 0$, ist für alle k ein $(\mathcal{F}_n^M)$-Martingal. [Tipp: $(X \circ M)_n^{\tau_k} = (\tilde{X} \circ M)_n$ mit $\tilde{X}_n = X_n \mathbf{1}_{\{\tau_k \geqslant n\}}$]

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, dem 22.6.06.

Markus Reiß

Kursusvorlesung
Stochastische Prozesse
Sommersemester 2006

8. Übungsblatt

1. Weise nach, dass folgende Prozesse Martingale bezüglich ihrer kanonischen Filtration sind:

   (a) $(N_t - \lambda t,\, t \geqslant 0)$ für einen Poissonprozess N der Intensität $\lambda > 0$;

   (b) $(\exp(\sigma B_t - \sigma^2 t/2),\, t \geqslant 0)$ für eine Brownsche Bewegung B und $\sigma > 0$.

2. Erarbeite die Grundlagen zu Funktionen von endlicher Variation und zum Stieltjes-Integral (z.B. Kap. 0.4 in Revuz/Yor, Kap. 90-92 in Heuser I) und berechne:

$$\text{(a)} \qquad \int_0^T \sin(x)\, d\cos(x) + \int_0^T \cos(x)\, d\sin(x),$$

$$\text{(b)} \qquad \int_0^{10} \mathbf{1}_{[1,4)}(x)\, d|x-2|,$$

$$\text{(c)} \qquad \int_0^{10} |x-2|\, d\mathbf{1}_{[1,4)}(x).$$

3. Mit $\Pi = \{0 =: t_0 \leqslant t_1 < \dots < t_m \leqslant T\}$ werde eine allgemeine Partition von $[0,T]$ bezeichnet. Man setzt $|\Pi| := \max_k (t_k - t_{k-1})$. Für eine Funktion $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ wird die *p-Variation* definiert als

$$V^p(f) := \lim_{|\Pi| \to 0} \sum_{t_k \in \Pi} |f(t_k) - f(t_{k-1})|^p,$$

   sofern der Grenzwert existiert und unabhängig von der Wahl der Partitionen ist. Beweise, dass für $q > p \geqslant 1$ jedes stetige f mit $V^p(f) < \infty$ verschwindende q-Variation $V^q(f) = 0$ besitzt. Kann man auf die Stetigkeit verzichten?

4. Zeige für L^2-Martingale M und Stoppzeiten τ in diskreter Zeit, dass $\langle M^\tau \rangle_n = \langle M \rangle_{\tau \wedge n}$ für das gestoppte Martingal M^τ und $n \geqslant 1$ gilt.

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, dem 29.6.06.

Markus Reiß

Kursusvorlesung
Stochastische Prozesse
Sommersemester 2006

9. Übungsblatt

1. Es sei $(M_t,\, t \geqslant 0)$ ein $(\mathcal{F}_t)$-Martingal auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t))$. Betrachte die vervollständigte Filtration $\tilde{\mathcal{F}}_t := \sigma(\mathcal{F}_t \bigcup \{A \in \mathcal{F} \mid \mathbb{P}(A) = 0\})$. Zeige, dass M dann auch ein $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$-Martingal ist.

2. Beweise, dass für ein (lokales) Martingal M und einen einfachen Prozess X, $X \circ M$ wiederum ein (lokales) Martingal ist.

3. Zeige für die Brownsche Bewegung B, dass $\langle B \rangle_t = t$ gilt. Berechne dazu unter Benutzung der unabhängigen Zuwächse von B:
$$\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=1}^m (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})\Big)^2\Big] \text{ für } 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = t.$$

4. Für zwei stetige stochastische Prozesse X und Y definiere ihre *quadratische Kovariation*:
$$\langle X, Y \rangle_t := \tfrac{1}{4}\big(\langle X + Y \rangle_t - \langle X - Y \rangle_t\big), \quad t \geqslant 0,$$
sofern die quadratischen Variationen $\langle X + Y \rangle$, $\langle X - Y \rangle$ existieren und endlich sind. Zeige unter diesen Voraussetzungen:
   (a) $\langle X, X \rangle_t = \langle X \rangle_t$, $t \geqslant 0$.
   (b) Es gilt für Partitionen Π von $[0, T]$ und $t \in [0, T]$:
   $$\langle X, Y \rangle_t = \lim_{|\Pi| \to 0} \sum_{t_k \in \Pi} (X_{t_k \wedge t} - X_{t_{k-1} \wedge t})(Y_{t_k \wedge t} - Y_{t_{k-1} \wedge t}) \text{ (stochastisch).}$$
   (c) Es gilt $|\langle X, Y \rangle_t| \leqslant \langle X \rangle_t^{1/2} \langle Y \rangle_t^{1/2}$. Insbesondere folgt $\langle M, A \rangle_t = 0$, $t \geqslant 0$, für stetige Martingale M und stetige Prozesse A von endlicher Variation.

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, dem 6.7.06.

Markus Reiß

Kursusvorlesung
Stochastische Prozesse
Sommersemester 2006

10. Übungsblatt

1. Beweise den Satz aus der Vorlesung, dass $(\mathcal{L}_M, d_M)$ ein vollständiger metrischer Raum ist.

2. Berechne für eine Brownsche Bewegung B mittels Integral-Approximation:

$$\text{(a)}\quad \int_0^t B_u \mathbf{1}_{[u,\infty)}(s)\,dB_s \quad (\text{für } 0 < u < t),$$

$$\text{(b)}\quad \int_0^t e^{\lambda s}\,dB_s + \int_0^t B_s\,de^{\lambda s} \quad (\text{für } \lambda \in \mathbb{R}).$$

3. Zeige für

$$A_m := \sqrt{2}\int_0^1 \cos(2\pi m t)\,dB_t, \quad B_m := \sqrt{2}\int_0^1 \sin(2\pi m t)\,dB_t, \quad m \geqslant 1:$$

   (a) A_m und B_m sind normalverteilt.
   (b) $A_m, B_m \sim \mathcal{N}(0,1)$ für alle $m \geqslant 1$.
   (c) Die Zufallsvariablen $(A_m, B_m)_{m\geqslant 1}$ sind unkorreliert.

   Tipp: Für (a) betrachte zunächst Approximationen, für (b) und (c) benutze die Itô-Isometrie.
   Bemerkung: A_m und B_m können als Frequenzen oder Fourierkoeffizienten von dB/dt verstanden werden, so dass (a)-(c) die Bezeichnung *weißes Rauschen* für dB/dt erklären.

4. Es seien X und Y einfache Prozesse, $M \in \mathcal{M}_c^2$ ein Martingal. Weise nach:

$$(Y \circ (X \circ M))_t = ((YX) \circ M)_t, \quad t \geqslant 0, \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

   Welche allgemeineren Bedingungen an Prozesse X und Y sichern, dass gilt

$$\int_0^t Y_s d\Big(\int_0^s X_u\,dM_u\Big) = \int_0^t Y_s X_s\,dM_s, \quad t \geqslant 0, \quad \mathbb{P}\text{-f.s. ?}$$

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, dem 11.7.06.

Markus Reiß

Kursusvorlesung
Stochastische Prozesse
Sommersemester 2006

11. Übungsblatt

1. Es sei M ein nicht-negatives stetiges lokales Martingal. Beweise mit dem Lemma von Fatou, dass M stets ein Supermartingal ist. Schließe ferner, dass M ein Martingal ist, falls $\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0]$ für alle $t \geqslant 0$ gilt.

2. Es sei B eine Brownsche Bewegung und X ein progressiv messbarer Prozess mit $\mathbb{P}(\int_0^T X_t^2 dt < \infty) = 1$ für alle $T > 0$. Betrachte das *stochastische Exponential*

$$Z_t := \exp\Big(\int_0^t X_s\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t X_s^2 ds\Big), \quad t \geqslant 0.$$

   (a) Wende die Itô-Formel auf $M_t := \int_0^t X_s\,dB_s$ an und weise nach

$$e^{M_t} = 1 + \int_0^t e^{M_s} X_s\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t e^{M_s} X_s^2\,ds, \quad t \geqslant 0.$$

   (b) Begründe $Z_t e^{-M_t} = 1 - \frac{1}{2}\int_0^t X_s^2 Z_s e^{-M_s} ds$ und schließe mittels partieller Integration

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s X_s\,dB_s, \quad t \geqslant 0.$$

   Z ist also ein lokales Martingal und nach (1) ein Supermartingal.

   (c) Gib ein Beispiel an, wo Z sogar ein Martingal ist.

3. Zeige, dass für $M \in \mathcal{M}_c^2$, $X \in \mathcal{L}_M$ und Stoppzeiten τ gilt:

$$\int_0^{\tau\wedge t} X_s\,dM_s = \int_0^t X_s\,dM_s^\tau = \int_0^t X_s^\tau\,dM_s^\tau, \quad t \geqslant 0.$$

   Hinweis: Betrachte zunächst $X \in \mathcal{L}_0$ und approximiere dann.

4. Es ist bekannt, dass für stetige und beschränkte Semimartingale X und Partitionen Π_n von $[0,t]$ gilt

$$\lim_{|\Pi_n|\to 0} \sum_{t_i\in\Pi_n} X_{t_i}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) = \int_0^t X_s\,dX_s \text{ (bzgl. stochastischer Konvergenz).}$$

   Erweitere dieses Resultat durch geeignete Lokalisierung auf allgemeine stetige Semimartingale.

5. Schlage Verbesserungen oder Korrekturen für die Gliederung vor.

Abgabe dieser freiwilligen Übungen in der Vorlesung am Donnerstag, dem 18.7.06.