# *Stochastische Prozesse*
# Gliederung zur Vorlesung im Sommersemester 2006

Markus Reiß
Universität Heidelberg
reiss@statlab.uni-heidelberg.de

VORLÄUFIGE FASSUNG: 28. Juli 2006

## Inhaltsverzeichnis

**1 Der Poissonprozess** **1**

**2 Allgemeine Theorie stochastischer Prozesse** **1**
- 2.1 Grundbegriffe . . . . . 2
- 2.2 Der Konsistenzsatz von Kolmogorov . . . . . 2
- 2.3 Stetige Pfade . . . . . 3

**3 Ergodentheorie** **4**
- 3.1 Stationäre und ergodische Prozesse . . . . . 4
- 3.2 Ergodensätze . . . . . 4
- 3.3 Die Struktur der invarianten Maße . . . . . 5
- 3.4 Ergänzungen . . . . . 6

**4 Invarianzprinzip und Brownsche Bewegung** **6**
- 4.1 Konvergenz im Raum stetiger Funktionen . . . . . 6
- 4.2 Das Invarianzprinzip von Donsker . . . . . 8
- 4.3 Der empirische Prozess . . . . . 8

**5 Martingale in stetiger Zeit** **9**
- 5.1 Martingale und lokale Martingale . . . . . 9
- 5.2 Stetige Martingale und quadratische Variation . . . . . 10

**6 Das Itô-Integral** **11**
- 6.1 Konstruktion . . . . . 11
- 6.2 Die Itô-Formel . . . . . 12
- 6.3 Martingaldarstellungssätze . . . . . 13

**7 Anwendungen in der Finanzmathematik** **14**

# 1 Der Poissonprozess

**Literatur.** *Krengel [12], Billingsley [2], Grimmet/Stirzacker [8], Durrett [5].*

**1.1 Definition.** *Es seien $(S_k)_{k\geqslant 1}$ nichtnegative Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ mit $S_k(\omega) \leqslant S_{k+1}(\omega)$ für alle $k \geqslant 1$, $\omega \in \Omega$. Dann heißt $N = (N_t,\, t \geqslant 0)$ mit*

$$N_t := \sum_{k\geqslant 1} \mathbf{1}_{\{S_k \leqslant t\}}, \quad t \geqslant 0,$$

*Zählprozess mit Sprungzeiten $(S_k)$.*

**1.2 Definition.** *Ein Zählprozess $N$ heißt Poissonprozess der Intensität $\lambda > 0$, falls*

*(a)* $\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda h + o(h)$ *für* $h \downarrow 0$*;*

*(b)* $\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$ *für* $h \downarrow 0$*;*

*(c) die Zuwächse $(N_{t_i} - N_{t_{i-1}})_{1\leqslant i\leqslant n}$ sind unabhängig für $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$;*

*(d) die Zuwächse sind stationär: $N_t - N_s \overset{d}{=} N_{t-s}$ für alle $t \geqslant s \geqslant 0$.*

**1.3 Satz.** *Für einen Zählprozess $N$ mit Sprungzeiten $(S_k)$ sind äquivalent:*

*(a) $N$ ist Poissonprozess;*

*(b) $N$ erfüllt Bedingungen (c),(d) an einen Poissonprozess, und es gilt $N_t \sim \mathrm{Poiss}(\lambda t)$ für alle $t > 0$;*

*(c) $T_1 := S_1$, $T_k := S_k - S_{k-1}$, $k \geqslant 2$, sind unabhängige $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilte Zufallsvariablen;*

*(d) $N_t \sim \mathrm{Poiss}(\lambda t)$ für alle $t > 0$ und die bedingte Dichte von $(S_1, \ldots, S_n)$ gegeben $\{N_t = n\}$ ist gegeben durch*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tfrac{n!}{t^n} \mathbf{1}_{\{0\leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant t\}}. \tag{1.1}$$

*(e) $N$ erfüllt Bedingung (c) an einen Poissonprozess und $\mathbb{E}[N_1] = \lambda$, sowie (1.1) gibt die bedingte Dichte von $(S_1, \ldots, S_n)$ gegeben $\{N_t = n\}$ an.*

# 2 Allgemeine Theorie stochastischer Prozesse

**Literatur.** *Bauer [1], Gänssler/Stute [7], Billingsley [2], Klenke [11].*

## 2.1 Grundbegriffe

**2.1 Definition.** *Eine Familie* $X = (X_t,\, t \in T)$ *von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *heißt* <u>*stochastischer Prozess*</u>*. Bei* $T = \mathbb{N}_0$ *spricht man von* <u>*diskreter Zeit*</u>*, bei* $T = \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ *von* <u>*stetiger Zeit*</u>*. Sind alle* $X_t$ $(S, \mathscr{S})$*-wertig, so heißt* $(S, \mathscr{S})$ <u>*Zustandsraum*</u> *von* $X$*. Für jedes feste* $\omega \in \Omega$ *heißt die Abbildung* $t \mapsto X_t(\omega)$ <u>*Pfad*</u>*,* <u>*Trajektorie*</u> *oder* <u>*Realisierung*</u> *von* $X$*.*

**2.2 Lemma.** *Ist* $(X_t,\, t \in T)$ *ein stochastischer Prozess mit Zustandsraum* $(S, \mathscr{S})$*, so ist* $\bar{X} : \Omega \to S^T$ *mit* $\bar{X}(\omega)(t) := X_t(\omega)$ *eine* $(S^T, \mathscr{S}^{\otimes T})$*-wertige Zufallsvariable.*

**2.3 Definition.** *Für einen stochastischen Prozess* $(X_t,\, t \in T)$ *heißen die Verteilungen der Zufallsvektoren* $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ *mit* $n \geqslant 1$, $t_1, \dots, t_n \in T$ <u>*endlich-dimensionale Verteilungen*</u> *von* $X$*. Man schreibt* $P_{t_1,\dots,t_n} = \mathbb{P}^{(X_{t_1},\dots,X_{t_n})}$*.*

**2.4 Lemma.** *Die endlich-dimensionalen Verteilungen* $(P_{t_1,\dots,t_n})$ *eines stochastischen Prozesses mit Zustandsraum* $(S, \mathscr{S})$ *erfüllen folgende Konsistenzbedingung:*

$$\forall\, I \subseteq J \subseteq T \text{ mit } I, J \text{ endlich } \forall A \in \mathscr{S}^{\otimes I} :\ P_J(\pi_{J,I}^{-1}(A)) = P_I(A), \tag{2.1}$$

*wobei* $\pi_{J,I} : S^J \to S^I$ *die Koordinatenprojektion von* $S^J$ *auf* $S^I$ *bezeichnet.*

**2.5 Definition.** *Zwei Prozesse* $(X_t,\, t \in T)$*,* $(Y_t,\, t \in T)$ *auf* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *heißen*

*(a)* <u>*ununterscheidbar*</u>*, falls* $\mathbb{P}(\forall\, t \in T :\ X_t = Y_t) = 1$*;*

*(b)* <u>*Versionen*</u> *voneinander, falls* $\forall\, t \in T :\ \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$*.*

**2.6 Definition.** *Ein Prozess* $X$ *heißt* <u>*stochastisch stetig*</u>*, falls aus* $t_n \to t$ *stets* $X_{t_n} \to X_t$ *in stochastischer Konvergenz folgt.*

## 2.2 Der Konsistenzsatz von Kolmogorov

**2.7 Definition.** *Ein System* $\mathscr{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ *von Teilmengen von* $\Omega$ *heißt* <u>*kompaktes Mengensystem*</u>*, falls es zu jeder Folge* $(C_n)$ *in* $\mathscr{C}$ *mit* $\bigcap_{n \geqslant 1} C_n = \varnothing$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *gibt mit* $\bigcap_{n \leqslant n_0} C_n = \varnothing$*. Ein* <u>*Inhalt*</u> $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}^+$ *auf einer Algebra* $\mathfrak{A}$ *über* $\Omega$ *ist eine additive Mengenfunktion.* $\mu$ *heißt* <u>*kompakt approximierbar*</u>*, falls*

$$\forall A \in \mathfrak{A},\, \varepsilon > 0\, \exists\, C \in \mathscr{C}, C \subseteq A :\ \mu(A \setminus C) < \varepsilon.$$

**2.8 Satz.** *Ein kompakt approximierbarer Inhalt auf einer Algebra ist bereits* $\sigma$*-additiv, also ein Prämaß.*

**2.9 Definition.** *Ein vollständiger separabler metrischer Raum heißt* <u>*polnisch*</u> *und wird kanonisch mit seiner Borel-*$\sigma$*-Algebra versehen.*

**2.10 Lemma.** *Es sei $(S, \mathscr{S})$ polnisch und $T$ eine nichtleere Menge. Außerdem bezeichne $\pi_I : S^T \to S^I$ für $I \subseteq T$ die Koordinatenprojektion. Dann sind*

$$\mathscr{C} := \bigcup_{t \in T} \pi_{\{t\}}^{-1}(\{K \subseteq S \mid K \text{ kompakt}\}) = \bigcup_{t \in T} \{K_t \times S^{T \setminus \{t\}} \mid K_t \subseteq S \text{ kompakt}\},$$
$$\mathscr{D} := \bigcup_{\substack{I \subseteq T \\ I \text{ endl.}}} \pi_I^{-1}(\{K \subseteq S^I \mid K \text{ kompakt}\}) = \bigcup_{\substack{I \subseteq T \\ I \text{ endl.}}} \{K_I \times S^{T \setminus I} \mid K_I \subseteq S^I \text{ kompakt}\}$$

*kompakte Mengensysteme über $S^T$.*

**2.11 Satz** (Konsistenzsatz)**.** *Es sei $(S, \mathscr{S})$ ein polnischer Raum und $T$ eine nichtleere Menge. Für jede endliche Teilmenge $I \subseteq T$ sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P_I$ auf $(S^I, \mathscr{S}^{\otimes I})$ gegeben, so dass $(P_I)_I$ die Konsistenzbedingung (2.1) erfüllt. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $(S^T, \mathscr{S}^{\otimes T})$, so dass $\mathbb{P}(\pi_I^{-1}(B)) = P_I(B)$ gilt für alle $I$ und $B \in \mathscr{S}^{\otimes I}$.*

**2.12 Korollar.** *Zu einer vorgegebenen konsistenten Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen $P_I$ auf $(S^I, \mathscr{S}^{\otimes I})$ existiert ein stochastischer Prozess mit endlich-dimensionalen Verteilungen $(P_I)$.*

**2.13 Korollar.** *Für eine Familie $(P_t)_{t \in T}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf einem polnischen Raum $(S, \mathscr{S})$ existiert das Produktmaß $\bigotimes_{t \in T} P_t$ auf $(S^T, \mathscr{S}^{\otimes T})$.*

## 2.3 Stetige Pfade

**2.14 Lemma.** *Ist $(S, \mathscr{S})$ ein Messraum und $T$ eine nichtleere Menge, so existiert zu jedem $B \in \mathscr{S}^{\otimes T}$ eine abzählbare Menge $I \subseteq T$ derart, dass*

$$\forall x \in S^T,\, y \in B : \big(x(t) = y(t) \text{ für alle } t \in I\big) \Rightarrow x \in B.$$

**2.15 Korollar.** *Ist $(S, \mathscr{S})$ ein mindestens zweielementiger metrischer Raum mit beliebiger $\sigma$-Algebra, so liegt die Menge $C(\mathbb{R}^+, S)$ der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}^+$ nach $S$ nicht in $\mathscr{S}^{\otimes \mathbb{R}^+}$.*

**2.16 Definition.** *Ein Prozess $(Y_t,\, t \geqslant 0)$ heißt stetige Version (oder stetige Modifikation) eines Prozesses $(X_t,\, t \geqslant 0)$, falls $Y$ eine Version von $X$ ist und alle Pfade $t \mapsto Y_t(\omega)$ stetig sind.*

**2.17 Satz.** *Ein Prozess $(X_t,\, t \geqslant 0)$ besitzt eine stetige Version, falls:*

*(a) $X$ ist stochastisch stetig;*

*(b) es gibt eine Nullmenge $N$ und eine abzählbare dichte Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^+$, so dass für alle $\omega \in N^C$ der eingeschränkte Pfad $D \ni t \mapsto X_t(\omega)$ gleichmäßig auf $D \cap [0, T]$ stetig ist für jedes $T > 0$ (Separabilität).*

**2.18 Satz** (Stetigkeitssatz von Kolmogorov & Chentsov)**.** *Ein reellwertiger Prozess $(X_t,\, t \geqslant 0)$ erlaubt eine stetige Version, sofern es Konstanten $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $C > 0$ gibt mit*

$$\forall\, s, t \geqslant 0 : \ \mathbb{E}[|X_s - X_t|^\alpha] \leqslant C|s - t|^{1+\beta}.$$

# 3 Ergodentheorie

**Literatur.** *Shiryayev [16], Karlin/Taylor [10], Klenke [11], Petersen [14], Da Prato/Zabczyk [4].*

## 3.1 Stationäre und ergodische Prozesse

**3.1 Definition.** *Ein stochastischer Prozess $(X_t,\, t \in T)$ mit $T \in \{\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}\}$ heißt stationär, falls $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+s}, \dots, X_{t_n+s})$ gilt für alle $n \geqslant 1$, $t_1, \cdots, t_n \in T$ und $s \in T$.*

**3.2 Definition.** *Eine messbare Abbildung $T : \Omega \to \Omega$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ heißt maßerhaltend, falls $\mathbb{P}(T^{-1}(A)) = \mathbb{P}(A)$ für alle $A \in \mathscr{F}$ gilt.*

**3.3 Lemma.**

(a) *Jeder reellwertige stationäre Prozess $(X_n,\, n \geqslant 0)$ induziert eine maßerhaltende Transformation $T$ auf $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}^{\otimes \mathbb{N}_0}, \mathbb{P}^X)$ gemäß*

$$T((x_0, x_1, x_2, \dots)) = (x_1, x_2, \cdots) \text{ (Linksshift).}$$

(b) *Für eine Zufallsvariable $Y$ und eine maßerhaltende Abbildung $T$ auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ bildet $X_n(\omega) := Y(T^n(\omega))$, $n \geqslant 0$, ($T^0 := \mathrm{Id}$) einen stationären Prozess.*

**3.4 Definition.** *Ein Ereignis $A$ heißt (fast) invariant bezüglich einer maßerhaltenden Transformation $T$ auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, falls $\mathbb{P}(T^{-1}(A) \Delta A) = 0$ gilt. Die $\sigma$-Algebra (!) aller (fast) invarianten Ereignisse wird mit $\mathscr{I}_T$ bezeichnet. $T$ heißt ergodisch, falls $\mathscr{I}_T$ trivial ist, d.h. $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ für alle $A \in \mathscr{I}_T$ gilt.*

**3.5 Lemma.** *Für eine maßerhaltende Transformation $T$ gilt:*

(a) *Eine Zufallsvariable $Y$ ist genau dann $\mathscr{I}_T$-messbar, wenn sie $T$-invariant ist, d.h. $Y \circ T = Y$ $\mathbb{P}$-f.s. gilt. Insbesondere ist $T$ ergodisch genau dann, wenn jede beschränkte und $T$-invariante Zufallsvariable $\mathbb{P}$-f.s. konstant ist.*

(b) *Für jedes Ereignis $A \in \mathscr{I}_T$ gibt es ein strikt invariantes Ereignis $B$ (d.h. $T^{-1}(B) = B$) mit $\mathbb{P}(A \Delta B) = 0$.*

## 3.2 Ergodensätze

**3.6 Lemma** (Maximallemma, maximaler Ergodensatz)**.** *Es seien $X \in L^1$ und $T$ maßerhaltend auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Mit den Bezeichnungen $S_n := \sum_{i=0}^{n-1} X \circ T^i$, $S_0 := 0$ und $M_n := \max\{S_0, \dots, S_n\}$ gilt $\mathbb{E}[X \mathbf{1}_{\{M_n > 0\}}] \geqslant 0$.*

**3.7 Satz** (Birkhoffscher oder individueller Ergodensatz)**.** *Es seien $X \in L^1$ und $T$ maßerhaltend auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Dann gilt*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X \circ T^i = \mathbb{E}[X \mid \mathscr{I}_T] \qquad \mathbb{P}\text{-f.s. und in } L^1.$$

*Ist $T$ sogar ergodisch, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X \circ T^i = \mathbb{E}[X] \qquad \mathbb{P}\text{-}f.s.\ und\ in\ L^1.$$

**3.8 Satz** ($L^p$-Version)**.** *Es seien $X \in L^p$, $p \geqslant 1$, und $T$ maßerhaltend auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X \circ T^i = \mathbb{E}[X \mid \mathscr{I}_T] \qquad \mathbb{P}\text{-}f.s.\ und\ in\ L^p.$$

**3.9 Korollar.** *Es sei $(X_n,\, n \geqslant 0)$ ein ergodischer Prozess in $L^1$ (d.h. $X$ ist stationär, $X_n \in L^1$ und der assoziierte Linksshift auf $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}_0}, \mathbb{P}^X)$ ist ergodisch). Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X_i = \mathbb{E}[X_1] \qquad \mathbb{P}\text{-}f.s.\ und\ in\ L^1.$$

*Insbesondere gilt das starke Gesetz der großen Zahlen für unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen $(X_n)$ in $L^1$.*

**3.10 Korollar.** *Eine maßerhaltende Abbildung $T$ auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ist genau dann ergodisch, wenn*

$$\forall A, B \in \mathscr{F} : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(A \cap T^{-i}(B)) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

## 3.3 Die Struktur der invarianten Maße

**3.11 Definition.** *Es sei $T : \Omega \to \Omega$ messbar auf $(\Omega, \mathscr{F})$. Jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu$ auf $\mathscr{F}$ mit $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathscr{F}$ heißt <u>invariant</u> bezüglich $T$. Ist $T$ sogar ergodisch auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$, so wird auch $\mu$ <u>ergodisch</u> genannt. Die Menge aller invarianten Wahrscheinlichkeitsmaße bezüglich $T$ wird mit $\mathscr{M}_T$ bezeichnet.*

**3.12 Lemma.** *$\mathscr{M}_T$ ist konvex.*

**3.13 Satz.** *Je zwei verschiedene, bezüglich $T$ ergodische Maße sind singulär.*

**3.14 Satz.** *Die ergodischen Maße bezüglich $T$ bilden genau die Extremalpunkte der konvexen Menge $\mathscr{M}_T$.*

**3.15 Korollar.** *Besitzt $T$ genau ein invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß, so ist dieses ergodisch.*

## 3.4 Ergänzungen

**3.16 Definition.** *Eine maßerhaltende Abbildung $T$ auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ heißt* *mischend, falls*

$$\forall A, B \in \mathscr{F} : \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A \cap T^{-n}(B)) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$$

*gilt. Sie heißt gleichmäßig, stark oder $\alpha$-mischend, wenn*

$$\alpha_n := \sup_{A,B\in\mathscr{F}} |\mathbb{P}(A \cap T^{-n}(B)) - \mathbb{P}(A \cap B)| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

**3.17 Satz** (ZGWS unter Mischung)**.** *Ist $T$ stark mischend mit Koeffizienten $\alpha_n = O(n^{-5})$ und $X \in L^{12}$ auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Var}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} X \circ T^i\Big) = \sum_{i\geqslant 0} \mathbb{E}[X\,(X \circ T^i)] =: \sigma^2;$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} (X \circ T^i - \mathbb{E}[X]) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

**3.18 Definition.** *Eine Familie $(T_t)_{t\geqslant 0}$ messbarer Abbildungen $T_t : \Omega \to \Omega$ auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ heißt Fluss, falls*

*(a)* $\forall s, t \geqslant 0 : \; T_s \circ T_t = T_{s+t}$ *(Halbgruppeneigenschaft);*

*(b)* $(\omega, t) \mapsto T_t(\omega)$ *ist* $(\mathscr{F} \otimes \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^+}, \mathscr{F})$*-messbar.*

$(T_t)$ *heißt maßerhaltend, falls* $\mathbb{P}(T_t^{-1}(B)) = \mathbb{P}(B)$ *für alle* $t \geqslant 0$, $B \in \mathscr{F}$ *gilt.*

**3.19 Definition.** *Ein Ereignis $A$ mit $\mathbb{P}(T_t^{-1}(A)\Delta A) = 0$ für alle $t > 0$ heißt (fast) invariant bezüglich $(T_t)$, und $\mathscr{I}_T$ bezeichnet die $\sigma$-Algebra (!) aller bezüglich $(T_t)$ (fast) invarianten Mengen.*

**3.20 Satz** (Ergodensatz in stetiger Zeit)**.** *Es seien $(T_t)$ ein maßerhaltender Fluss und $X \in L^p$, $p \geqslant 1$, auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Dann gilt*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t X \circ T_s \, ds = \mathbb{E}[X \mid \mathscr{I}_T] \quad \mathbb{P}\text{-f.s. und in } L^p.$$

# 4 Invarianzprinzip und Brownsche Bewegung

**Literatur.** *Billinsley [3], Klenke [11], Gänssler/Stute [7], Karatzas/Shreve [9].*

## 4.1 Konvergenz im Raum stetiger Funktionen

**4.1 Definition.** *Wir setzen $C([0,T]) := \{f : [0,T] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$, $\|f\|_\infty := \sup_t |f(t)|$ und versehen den normierten Raum $(C([0,T]), \|\bullet\|_\infty)$ mit seiner Borel-$\sigma$-Algebra $\mathfrak{B}_C$.*

**4.2 Satz.** $(C([0,T]), \|\bullet\|_\infty)$ *ist ein Banachraum, d.h. ein vollständiger normierter Vektorraum.*

**4.3 Lemma.** *Es gilt* $\mathfrak{B}_C = \sigma(\pi_t,\, t \in [0,T])$ *mit den Projektionen* $\pi_t : C([0,T]) \to \mathbb{R}$, $\pi_t(f) = f(t)$.

**4.4 Korollar.**

(a) *Jeder Prozess* $(X_t,\, 0 \leqslant t \leqslant T)$ *mit stetigen Pfaden kann als* $C([0,T])$*-wertige Zufallsvariable angesehen werden.*

(b) *Ein Wahrscheinlichkeitsmaß* $\mathbb{P}$ *auf* $\mathfrak{B}_C$ *ist bereits durch seine endlich-dimensionalen Verteilungen* $\mathbb{P}(\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_n}(B_n))$, $n \geqslant 1$, $B_n \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}$, $\pi_{t_1,\dots,t_n}(f) = (f(t_1),\dots,f(t_n))^\top$, *eindeutig bestimmt.*

**4.5 Satz.** *Eine Folge* $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ *von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf* $\mathfrak{B}_C$ *konvergiert genau dann schwach gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß* $\mu$, *wenn alle endlich-dimensionalen Verteilungen von* $(\mu_n)$ *gegen die von* $\mu$ *konvergieren und die Folge* $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ *straff ist.*

**4.6 Definition.** *Für* $f \in C([0,T])$ *und* $\delta > 0$ *wird der Stetigkeitsmodul definiert als*

$$\omega_\delta(f) := \max\{|f(s) - f(t)| \,|\, s,t \in [0,T],\ |s-t| \leqslant \delta\}.$$

**4.7 Satz** (Arzelà-Ascoli)**.** *Eine Teilmenge* $A \subseteq C([0,T])$ *ist genau dann relativ kompakt, wenn*

(a) $\sup_{f\in A}|f(0)| < \infty$ *(gleichmäßige Beschränktheit) sowie*

(b) $\lim_{\delta\to 0}\sup_{f\in A}\omega_\delta(f) = 0$ *(gleichgradige Stetigkeit).*

**4.8 Korollar.** *Eine Folge* $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ *von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf* $\mathfrak{B}_C$ *ist genau dann straff, wenn*

(a) $\lim_{R\to\infty}\sup_n \mu_n(\{|f(0)| > R\}) = 0$ *sowie*

(b) $\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mu_n(\{\omega_\delta(f) \geqslant \varepsilon\}) = 0$ *für alle* $\varepsilon > 0$.

**4.9 Lemma.** *Eine Folge* $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ *von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf* $\mathfrak{B}_C$ *ist bereits dann straff, wenn*

(a) $\lim_{R\to\infty}\sup_n \mu_n(\{|f(0)| > R\}) = 0$ *sowie*

(b') $\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,T-\delta]}\delta^{-1}\mu_n(\{\max_{s\in[t,t+\delta]}|f(s) - f(t)| \geqslant \varepsilon\}) = 0$ *für alle* $\varepsilon > 0$.

**4.10 Satz.** *Es sei* $(X_t^{(n)},\, 0 \leqslant t \leqslant T)$ *eine Folge stetiger Prozesse mit Verteilungen* $\mu_n$ *auf* $\mathfrak{B}_C$. *Hinreichend für Bedingung (b') im obigen Lemma ist dann:*

(b") $\exists \alpha,\, \beta > 0,\, K > 0\ \forall n \geqslant 1,\ s,t \in [0,T] :\ \mathbb{E}[|X_s^{(n)} - X_t^{(n)}|^\alpha] \leqslant K|s-t|^{1+\beta}$.

## 4.2 Das Invarianzprinzip von Donsker

**4.11 Satz** (Donsker, Funktionaler ZGWS)**.** *Es sei $(X_k)$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen in $L^2$ mit $\mathbb{E}[X_k] = 0$, $\operatorname{Var}(X_k) = 1$. Setze $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$ sowie*

$$Y_t^{(n)} := \frac{1}{\sqrt{n}}\Big(S_{\lfloor nt\rfloor} + (nt - \lfloor nt\rfloor)X_{\lfloor nt\rfloor+1}\Big), \quad t \in [0,1].$$

*Dann gilt $Y^{(n)} \xrightarrow{d} B$ mit einer Brownschen Bewegung $(B_t, 0 \leqslant t \leqslant 1)$ und Konvergenz in Verteilung auf $(C([0,1]), \mathfrak{B}_C)$.*

**4.12 Lemma.** *Mit den Bezeichnungen aus dem Satz gilt für alle $\lambda > 0$, $N \in \mathbb{N}$*

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant N}|S_i| \geqslant \lambda\sqrt{N}\Big) \leqslant \mathbb{P}\Big(|S_N| \geqslant (\lambda - \sqrt{2})\sqrt{N}\Big).$$

**4.13 Korollar.** *Die Brownsche Bewegung existiert (auf dem Intervall $[0,1]$).*

**4.14 Satz** (Spiegelungsprinzip)**.** *Es sei $(X_k)$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen in $L^2$ mit $\mathbb{E}[X_k] = 0$, $\operatorname{Var}(X_k) = 1$. Setze $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$, $M_n := \frac{1}{\sqrt{n}}\max_{1\leqslant i\leqslant n} S_i$. Dann folgt $M_n \xrightarrow{d} |B_1|$ mit $B_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$. Ebenso gilt für die Brownsche Bewegung $B$: $\max_{0\leqslant t\leqslant T} B_t \stackrel{d}{=} |B_T|$.*

## 4.3 Der empirische Prozess

**4.15 Definition.** *Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion $F$ auf $\mathbb{R}$. Dann bezeichnet*

$$F_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{X_k \leqslant x\}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

*die empirische Verteilungsfunktion. Für jedes $n \geqslant 1$ heißt*

$$Y^{(n)}(x) := \sqrt{n}(F_n(x) - F(x)), \quad x \in \mathbb{R},$$

*empirischer Prozess bei $n$ Beobachtungen oder Realisierungen.*

**4.16 Lemma.** *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $n \to \infty$ gilt $Y^{(n)}(x) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, F(x)(1 - F(x)))$.*

**4.17 Satz.** *Es seien $(X_k)_{k\geqslant 1}$ unabhängige $U([0,1])$-verteilte Zufallsvariablen sowie $\tilde{Y}^{(n)}$ die lineare Interpolation des zugehörigen empirischen Prozesses $Y^{(n)}$ an den Punkten $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ mit $\tilde{Y}^{(n)}(0) = \tilde{Y}^{(n)}(1) = 0$. Dann gilt*

$$\tilde{Y}^{(n)} \xrightarrow{d} B^0 \text{ in } (C([0,1]), \mathfrak{B}_C),$$

*wobei $(B_x^0, 0 \leqslant x \leqslant 1)$ eine Brownsche Brücke ist.*

**4.18 Korollar** (Kolmogorov-Smirnov)**.** *Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit stetiger Verteilungsfunktion $F$ sowie $T_n =:= \sqrt{n}\sup_{x\in\mathbb{R}}|F_n(x) - F(x)|$. Dann gilt $T_n \xrightarrow{d} \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|B^0(t)|$ mit einer Brownschen Brücke $B^0$.*

# 5 Martingale in stetiger Zeit

**Literatur.** *Karatzas/Shreve [9], Revuz/Yor [15], Klenke [11], Øksendal [13].*

## 5.1 Martingale und lokale Martingale

**5.1 Definition.** *Eine Familie $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ von $\sigma$-Algebren mit $\mathscr{F}_s \subseteq \mathscr{F}_t$ für $s \leqslant t$ heißt Filtration. Das Tupel $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}, (\mathscr{F}_t))$ mit einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ und einer Filtration $(\mathscr{F}_t)$, die $\mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{F}$ für alle $t \geqslant 0$ erfüllt, heißt filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Ein Prozess $(X_t,\, t \geqslant 0)$ auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}, (\mathscr{F}_t))$ heißt adaptiert, wenn $X_t$ $\mathscr{F}_t$-messbar ist für alle $t \geqslant 0$. Eine Zufallsvariable $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ heißt Stoppzeit bezüglich $(\mathscr{F}_t)$, falls $\{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t$ für alle $t \geqslant 0$ gilt. Mit*

$$\mathscr{F}_\tau := \{A \in \mathscr{F} \mid A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t \text{ für alle } t \geqslant 0\}$$

*wird die $\sigma$-Algebra der $\tau$-Vergangenheit bezeichnet.*

**5.2 Lemma.** *Es sei $X$ ein stetiger Prozess und $F \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen. Dann ist*

$$\tau_F := \inf\{t \geqslant 0 \mid X_t \in F\}$$

*eine Stoppzeit bezüglich der kanonischen Filtration $(\mathscr{F}_t^X)$.*

**5.3 Definition.** *Ein $(\mathscr{F}_t)$-adaptierter Prozess $X$ heißt Martingal (bzw. Submartingal, Supermartingal), falls*

(a) *$X_t \in L^1$, $t \geqslant 0$, und*

(b) *$\mathbb{E}[X_t \mid \mathscr{F}_s] = X_s$ $\mathbb{P}$-f.s. für alle $0 \leqslant s \leqslant t$ gilt (bzw '$\geqslant$' für Submartingal, '$\leqslant$' für Supermartingal).*

**5.4 Definition.** *Ein Prozess $(X_t,\, t \geqslant 0)$ heißt progressiv messbar bezüglich $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$, falls für jedes $T \geqslant 0$ die Abbildung $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ auf $[0, T] \times \Omega$ bezüglich der Produkt-$\sigma$-Algebra $\mathfrak{B}_{[0,T]} \otimes \mathscr{F}_T$ messbar ist.*

**5.5 Satz.** *Jeder adaptierte rechtsstetige oder linksstetige Prozess ist progressiv messbar.*

**5.6 Satz.** *Ist $\tau$ eine endliche Stoppzeit und $X$ progressiv messbar, so ist $X_\tau$ eine $\mathscr{F}_\tau$-messbare Zufallsvariable.*

**5.7 Satz.**

(a) *Ist $(X_t,\, t \geqslant 0)$ ein Martingal, $\varphi$ eine konvexe Funktion und $\varphi(X_t) \in L^1$, $t \geqslant 0$, dann ist $(\varphi(X_t),\, t \geqslant 0)$ ein Submartingal. Insbesondere ist für ein $L^2$-Martingal $X$ der Prozess $(X_t^2,\, t \geqslant 0)$ ein Submartingal.*

(b) *Es sei $(X_t,\, t \geqslant 0)$ ein Submartingal mit rechtsstetigen Pfaden. Dann gilt:*

  (i) *$\mathbb{P}(\sup_{0\leqslant u\leqslant t} X_u \geqslant \alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha}\, \mathbb{E}[X_t \vee 0]$ für alle $\alpha > 0$, $t \geqslant 0$.*

  (ii) *$\mathbb{E}[\sup_{0\leqslant u\leqslant t} |X_u|^p] \leqslant (p/(p-1))^p\, \mathbb{E}[|X_t|^p]$ für alle $p > 1$, $t \geqslant 0$ (Doobsche Martingalungleichung).*

*(iii) Wenn* $\sup_{t<T} \mathbb{E}[|X_t|]$ *endlich ist für* $T \in (0,\infty]$*, so existiert* $\lim_{t\uparrow T} X_t$ $\mathbb{P}$*-f.s. und liegt in* $L^1$*.*

*(iv) Sind* $\sigma \leqslant \tau$ *beschränkte Stoppzeiten, so gilt* $\mathbb{E}[X_\tau \,|\, \mathscr{F}_\sigma] \geqslant X_\sigma$ $\mathbb{P}$*-f.s. sowie Gleichheit für Martingale* $X$*.*

**5.8 Definition.** $(X_t,\, t \geqslant 0)$ *heißt* *lokales Martingal* *bezüglich* $(\mathscr{F}_t)$*, falls es* $(\mathscr{F}_t)$*-Stoppzeiten* $\tau_n$ *gibt mit* $\tau_n \uparrow \infty$ $\mathbb{P}$*-f.s. derart, dass die gestoppten Prozesse* $X_t^{\tau_n} := X_{t\wedge\tau_n}$*,* $t \geqslant 0$*,* $(\mathscr{F}_t)$*-Martingale sind für alle* $n \geqslant 1$*.* $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$ *wird* *lokalisierende Folge von Stoppzeiten* *genannt.*

**5.9 Definition.** *Ein Prozess* $X$ *der Form*

$$X_t(\omega) = \xi_0(\omega)\mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i(\omega)\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t), \quad t \geqslant 0,\ \omega \in \Omega,$$

*mit* $0 = t_0 < t_1 < \cdots$ *und* $t_i \uparrow \infty$ *sowie* $\mathscr{F}_{t_i}$*-messbaren, beschränkten Zufallsvariablen* $\xi_i$ *heißt* *einfacher Prozess*. *Für einen solchen einfachen Prozess* $X$ *und einen weiteren Prozess* $Y$ *definiert man*

$$(X \circ Y)_t := \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i (Y_{t\wedge t_{i+1}} - Y_{t\wedge t_i}), \quad t \geqslant 0.$$

**5.10 Satz.** *Ist* $M$ *ein Martingal (bzw. lokales Martingal) und* $X$ *einfach, so ist* $X \circ M$ *wiederum ein Martingal (bzw. lokales Martingal).*

## 5.2 Stetige Martingale und quadratische Variation

**5.11 Definition.** *Im folgenden sei stets ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}, (\mathscr{F}_t))$ *fest vorgegeben. Mit* $\mathscr{M}_c^2$ *werde die Menge aller stetiger* $(\mathscr{F}_t)$*-Martingale* $(M_t,\, t \geqslant 0)$ *mit* $M_0 = 0$ *und* $M_t \in L^2$*,* $t \geqslant 0$*, bezeichnet. Setze für* $M \in \mathscr{M}_c^2$

$$\|M\|_{\mathscr{M}_c^2} := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(\|M_n\|_{L^2} \wedge 1).$$

**5.12 Lemma.** $\mathscr{M}_c^2$ *ist ein Vektorraum und* $d(M,N) := \|M - N\|_{\mathscr{M}_c^2}$ *eine Metrik auf* $\mathscr{M}_c^2$*, sofern ununterscheidbare Martingale identifiziert werden.*

**5.13 Satz.** $(\mathscr{M}_c^2, d)$ *ist ein vollständiger metrischer Raum.*

**5.14 Satz.** *Ist* $M \in \mathscr{M}_c^2$ *von endlicher Variation auf* $[0,T]$*, so ist* $M$ $\mathbb{P}$*-f.s. konstant auf* $[0,T]$*.*

**5.15 Korollar.** *Jedes nicht-triviale (d.h. nicht* $\mathbb{P}$*-f.s. konstante) stetige Martingal besitzt unbeschränkte Variation, ist also insbesondere nicht differenzierbar.*

**5.16 Definition.** *Für eine Partition* $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T\}$ *von* $[0,T]$ *und einen Prozess* $(X_t,\, t \geqslant 0)$ *setze*

$$V_{t,\Pi}^2(X) := \sum_{i=1}^{m} (X_{t\wedge t_i} - X_{t\wedge t_{i-1}})^2, \quad t \in [0,T].$$

*Falls es einen Prozess $(\langle X\rangle_t,\, t \geqslant 0)$ gibt, so dass für $T > 0$ und alle Folgen von Partitionen $(\Pi_n)$ mit $|\Pi_n| \to 0$ gilt*

$$V^2_{T,\Pi_n}(X) \xrightarrow{\mathbb{P}} \langle X\rangle_T \text{ für } n \to \infty,$$

*so heißt $\langle X\rangle$ quadratischer Variationsprozess von $X$.*

**5.17 Satz.** *Jedes beschränkte und stetige Martingal $M$ besitzt einen quadratischen Variationsprozess $\langle M\rangle$. Dieser ist (bis auf Ununterscheidbarkeit) eindeutig charakterisiert als einziger Prozess mit stetigen, monoton wachsenden Pfaden, so dass $\langle M\rangle_0 = 0$ und $(M_t^2 - \langle M\rangle_t,\, t \geqslant 0)$ ein Martingal ist.*

**5.18 Korollar.** *Zu jedem stetigen lokalen Martingal $M$ existiert ein quadratischer Variationsprozess $\langle M\rangle$, der (bis auf Ununterscheidbarkeit) eindeutig charakterisiert ist als einziger stetiger, monoton wachsender Prozess, so dass $\langle M\rangle_0 = 0$ und $(M_t^2 - \langle M\rangle_t,\, t \geqslant 0)$ ein lokales Martingal ist.*

# 6 Das Itô-Integral

**Literatur.** *Karatzas/Shreve [9], Revuz/Yor [15], Klenke [11], Øksendal [13].*

## 6.1 Konstruktion

**6.1 Definition.** *Mit $\mathscr{L}_0$ werde die Menge der einfachen Prozesse bezeichnet. Für ein Martingal $M \in \mathscr{M}_c^2$ sei $\mathscr{L}_M$ die Menge aller progressiv messbaren Prozesse $(X_t,\, t \geqslant 0)$ mit*

$$\forall\, T > 0 : \ \|X\|^2_{M,T} := \mathbb{E}\Big[\int_0^T X_t^2 \, d\langle M\rangle_t\Big] < \infty.$$

*Für $X \in \mathscr{L}_M$ setze $\|X\|_{\mathscr{L}_M} := \sum_{n\geqslant 1} 2^{-n}(\|X\|_{M,n} \wedge 1)$.*

**6.2 Satz.** *$(\mathscr{L}_M, d_M)$ mit $d_M(X,Y) := \|X - Y\|_{\mathscr{L}_M}$ ist ein vollständiger metrischer Raum (bei Identifizierung von Prozessen $X$, $Y$ mit $\|X - Y\|_{\mathscr{L}_M} = 0$).*

**6.3 Satz.** *Für $M \in \mathscr{M}_c^2$ und einfache Prozesse $X \in \mathscr{L}_0$ besitzt das Integral $\int_0^t X_s\, dM_s := (X \circ M)_t$ folgende Eigenschaften:*

- *(a) $\int_0^\bullet X_s\, dM_s \in \mathscr{M}_c^2$, insbesondere also $\int_0^0 X_s\, dM_s = 0$, $\mathbb{E}[\int_0^t X_u\, dM_u \mid \mathscr{F}_s] = \int_0^s X_u\, dM_u$ für $0 \leqslant s \leqslant t$.*
- *(b) $\langle \int_0^\bullet X_s\, dM_s\rangle_t = \int_0^t X_s^2\, d\langle M\rangle_s$, insbesondere also $\mathbb{E}[(\int_0^t X_s\, dM_s)^2] = \mathbb{E}[\int_0^t X_s^2\, d\langle M\rangle_s]$ (Itô-Isometrie) und $\|\int_0^\bullet X_s\, dM_s\|_{\mathscr{M}_c^2} = \|X\|_{\mathscr{L}_M}$.*
- *(c) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $X, Y \in \mathscr{L}_0$ gilt $\int_0^t (\alpha X_s + Y_s)\, dM_s = \alpha \int_0^t X_s\, dM_s + \int_0^t Y_s\, dM_s$, $t \geqslant 0$.*

**6.4 Korollar.** *Die Abbildung $X \mapsto \int_0^\bullet X_s\, dM_s$ ist eine lineare und isometrische Abbildung vom Unterraum $\mathscr{L}_0 \subseteq \mathscr{L}_M$ der einfachen Prozesse nach $\mathscr{M}_c^2$. Diese kann in eindeutiger Weise (bis auf Ununterscheidbarkeit) stetig auf den Abschluss $\overline{\mathscr{L}_0} \subseteq \mathscr{L}_M$ fortgesetzt werden.*

**6.5 Satz.** *Zu jedem beschränkten, progressiv messbaren Prozess $X$ und $T > 0$ existiert eine Folge $(X^{(m)})$ einfacher Prozesse mit*

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\Big[\int_0^T (X_t^{(m)} - X_t)^2\,dt\Big] = 0.$$

**6.6 Satz.** *Es gilt $\overline{\mathscr{L}_0} = \mathscr{L}_M$.*

**6.7 Definition.** *Für $X \in \mathscr{L}_M$ ist das Itô-Integral definiert als eindeutiger Grenzwert von Integralen über einfache Prozesse $X^{(m)}$ mit $\lim_{m\to\infty}\|X - X^{(m)}\|_{\mathscr{L}_M} = 0$:*

$$\int_0^t X_s\,dM_s := \lim_{m\to\infty}\int_0^t X_s^{(m)}\,dM_s \text{ (Konvergenz in } \mathscr{M}_c^2).$$

**6.8 Satz.** *Für $M \in \mathscr{M}_c^2$ und $X \in \mathscr{L}_M$ besitzt das Itô-Integral folgende Eigenschaften:*

*(a)* $\int_0^\bullet X_s\,dM_s \in \mathscr{M}_c^2$*, insbesondere also* $\int_0^0 X_s\,dM_s = 0$, $\mathbb{E}[\int_0^t X_u\,dM_u \,|\, \mathscr{F}_s] = \int_0^s X_u\,dM_u$ *für* $0 \leqslant s \leqslant t$.

*(b)* $\langle\int_0^\bullet X_s\,dM_s\rangle_t = \int_0^t X_s^2\,d\langle M\rangle_s$*, insbesondere also* $\mathbb{E}[(\int_0^t X_s\,dM_s)^2] = \mathbb{E}[\int_0^t X_s^2\,d\langle M\rangle_s]$ *(Itô-Isometrie) und* $\|\int_0^\bullet X_s\,dM_s\|_{\mathscr{M}_c^2} = \|X\|_{\mathscr{L}_M}$.

*(c) Für* $\alpha \in \mathbb{R}$ *und* $X, Y \in \mathscr{L}_M$ *gilt* $\int_0^t(\alpha X_s + Y_s)\,dM_s = \alpha\int_0^t X_s\,dM_s + \int_0^t Y_s\,dM_s$, $t \geqslant 0$.

**6.9 Korollar.** *Für die Brownsche Bewegung $B$ und $X, Y \in \mathscr{L}_B$ gilt*

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^t X_s\,dB_s\Big] = 0, \quad \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t X_s\,dB_s\Big)\Big(\int_0^t Y_s\,dB_s\Big)\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_0^t X_s Y_s\,ds\Big].$$

**6.10 Definition.** *Für ein stetiges lokales Martingal $M$ mit $M_0 = 0$ sei $\mathscr{L}_{M,loc}$ die Menge der progressiv messbaren Prozesse $X$ mit $\mathbb{P}(\int_0^T X_t^2\,d\langle M\rangle_t < \infty) = 1$ für alle $T > 0$. Ist $(\sigma_n)$ eine lokalisierende Folge von Stoppzeiten für $M$ und $\rho_n := \inf\{t \geqslant 0 \,|\, \int_0^t X_s^2\,d\langle M\rangle_s \geqslant n\} \wedge n$, so setze $\tau_n := \sigma_n \wedge \rho_n$ und definiere das erweiterte Itô-Integral*

$$\int_0^t X_s\,dM_s := \lim_{n\to\infty}\int_0^t X_s^{\tau_n}\,dM_s^{\tau_n}.$$

**6.11 Satz.** *Das erweiterte Itô-Integral ist wohldefiniert, linear im Integranden und ein stetiges lokales Martingal mit quadratischer Variation $\langle\int_0^\bullet X_s\,dM_s\rangle_t = \int_0^t X_s^2\,d\langle M\rangle_s$, $t \geqslant 0$.*

## 6.2 Die Itô-Formel

**6.12 Definition.** *Ein stetiges Semimartingal $(X_t,\, t \geqslant 0)$ bezüglich $(\mathscr{F}_t)$ ist ein Prozess, der sich schreiben lässt als*

$$X_t = M_t + A_t, \quad t \geqslant 0,$$

*mit einem stetigen lokalen $(\mathscr{F}_t)$-Martingal $M$ mit $M_0 = 0$ und einem $(\mathscr{F}_t)$-adaptierten stetigen Prozess $A$, der Pfade von endlicher Variation besitzt. Man setzt*

$$\int_0^t Y_s \, dX_s := \int_0^t Y_s \, dM_s + \int_0^t Y_s \, dA_s, \quad t \geqslant 0,$$

*sofern $Y \in \mathscr{L}_{M,loc}$ und für alle $\omega, t$ das Stieltjes-Integral $\int_0^t Y_s(\omega) \, dA_s(\omega)$ wohldefiniert ist.*

**6.13 Lemma.** *Für ein stetiges Semimartingal $X = M + A$ gilt $\langle X \rangle_t = \langle M \rangle_t$.*

**6.14 Satz.** *Für stetige Semimartingale $X$ und $Y$ gilt die Formel der partiellen Integration:*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s \, dY_s + \int_0^t Y_s \, dX_s + \langle X, Y \rangle_t, \quad t \geqslant 0,$$

*insbesondere auch $X_t^2 = X_0^2 + 2 \int_0^t X_s \, dX_s + \langle X \rangle_t$.*

**6.15 Satz** (Itô-Formel)**.** *Ist $X$ ein stetiges Semimartingal und $f \in C^2(\mathbb{R})$, so ist $f(X)$ ein stetiges Semimartingal, und es gilt:*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) \, dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \, d\langle X \rangle_s, \quad t \geqslant 0.$$

**6.16 Satz** (mehrdimensionale Itô-Formel)**.** *Ist $X = (X^1, \ldots, X^d)$ ein Vektor von $d$ stetigen Semimartingalen und $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$, so gilt:*

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \tfrac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) \, dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) \, d\langle X^i, X^j \rangle_s.$$

**6.17 Korollar.** *Ist $X$ ein stetiges Semimartingal und $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, so gilt:*

$$f(X_t, t) = f(X_0, 0) + \int_0^t \tfrac{\partial f}{\partial x}(X_s, s) \, dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s, s) \, d\langle X \rangle_s + \int_0^t \tfrac{\partial f}{\partial t}(X_s, s) \, ds.$$

## 6.3 Martingaldarstellungssätze

**6.18 Satz** (Lévy)**.** *Für einen Prozess $B$ sind äquivalent:*

*(a) $B$ ist eine Brownsche Bewegung.*

*(b) $B$ ist ein stetiges lokales Martingal mit $B_0 = 0$ und $\langle B \rangle_t = t$, $t \geqslant 0$.*

**6.19 Satz.** *Es sei $M$ ein stetiges lokales Martingal, dessen quadratische Variation $\mathbb{P}$-f.s. absolut stetig ist. Dann existiert (möglicherweise auf einem erweiterten Wahrscheinlichkeitsraum) eine Brownsche Bewegung $B$ und ein Prozess $X \in \mathscr{L}_{B,loc}$, so dass*

$$M_t = M_0 + \int_0^t X_s \, dB_s, \quad t \geqslant 0.$$

**6.20 Satz.** *Es sei $B$ eine Brownsche Bewegung mit kanonischer Filtration $(\mathscr{F}_t^B)$. Dann ist jedes $(\mathscr{F}_t^B)$-Martingal $M$ darstellbar als*

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s \, dB_s \ \mathbb{P}\text{-f.s.}, \quad t \geqslant 0,$$

*mit einer Konstanten $M_0$ und einem Prozess $H \in \mathscr{L}_{B,loc}$. Insbesondere besitzt $M$ also eine stetige Version mit absolut-stetiger quadratischer Variation.*

**6.21 Satz.** *Ist $M$ ein stetiges lokales Martingal mit $M_0 = 0$ und $\langle M \rangle_\infty = \infty$, so ist*

$$\tau_t := \inf\{s \geqslant 0 \,|\, \langle M \rangle_s > t\}, \quad t \geqslant 0,$$

*eine Stoppzeit bezüglich der um Nullmengen vervollständigten Filtration. Der Prozess $B_t := M_{\tau_t}$ ist eine Brownsche Bewegung, und es gilt $M_t = B_{\langle M \rangle_t}$.*

# 7 Anwendungen in der Finanzmathematik

**Literatur.** *Elliot/Kopp [6], Karatzas/Shreve [9], Øksendal [13]*

In einem einfachen Modell eines Finanzmarkts gibt es zwei Anlagemöglichkeiten:

(a) eine risikolose Anlage (*Anleihe*) mit deterministischem Wert $S_t^0 = e^{rt}$ zur Zeit $t \geqslant 0$;

(b) eine risikobehaftete Anlage (*Aktie*), deren Wert $S_t^1$ zur Zeit $t \geqslant 0$ durch ein stetiges Semimartingal modelliert wird, das an die verfügbaren Informationen $\mathscr{F}_t$ zur Zeit $t$ adaptiert ist.

Der Wert eines Portfolios zur Zeit $t \geqslant 0$, bestehend aus $H_t^0$ Anleihen und $H_t^1$ Aktien, ist gegeben durch

$$V_t = H_t^0 S_t^0 + H_t^1 S_t^1, \quad t \geqslant 0 \ (\textit{Vermögensprozess}).$$

Eine *selbstfinanzierende Anlagestrategie* ist ein $(\mathscr{F}_t)$-adaptierter Prozess $(H_t^0, H_t^1, t \geqslant 0)$, so dass

$$dV_t = H_t^0 dS_t^0 + H_t^1 dS_t^1, \quad t \geqslant 0.$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass die zugehörigen Integrale wohldefiniert sind. Führe *diskontierte* Größen ein:

$$\tilde{S}_t^0 := 1, \quad \tilde{S}_t^1 = e^{-rt} S_t^1, \quad \tilde{V}_t = e^{-rt} V_t.$$

Bei selbstfinanzierender Strategie gilt $\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t H_u^1 d\tilde{S}_u^1$.

Eine *europäische Calloption* gibt dem Besitzer das Recht, zum Fälligkeitstermin (*maturity*) $T > 0$ eine Aktie zum Ausübungspreis (*strike*) $K > 0$ zu kaufen. Ihr Wert zur Zeit $T$ ist also $C_T := (S_T^1 - K)^+ := \max(S_T^1 - K, 0)$. Betrachte das *Black-Scholes-Modell*:

$$dS_t^1 = \mu S_t^1 \, dt + \sigma S_t^1 \, dB_t, \quad t \geqslant 0.$$

Bezeichnet $C_t = C(S_t^1, t)$ den *fairen Preis* der Option zur Zeit $t \in [0, T]$ und $\tilde{C}_t = e^{-rt}C_t$, so gilt

$$\tilde{C}_t = C_0 + \int_0^t \tfrac{\partial}{\partial S}\tilde{C}(\tilde{S}_u^1, u)\, d\tilde{S}_u^1$$

mit dem fairen Preis zur Zeit $t = 0$ (*Black-Scholes-Formel*)

$$C_0 = S_0^1\Phi(y) - Ke^{-rT}\Phi(y - \sigma\sqrt{T}),$$

wobei $y := \frac{\log(S_0^1/K)+T(r+\sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T}}$ und $\Phi$ die Verteilungsfunktion von $\mathcal{N}(0,1)$ bezeichnet.

## Literatur


[1] Bauer, H. (2002) *Wahrscheinlichkeitstheorie*, 5. Auflage, de Gruyter.

[2] Billingsley, P. (1986) *Probability and Measure*, 2nd Edition, Wiley.

[3] Billingsley, P. (1999) *Convergence of Probability Measures*, 2nd Edition, Wiley.

[4] Da Prato, G. and Zabczyk, J. (1996) *Ergodicity for Infinite Dimensional Systems*, Cambridge University Press.

[5] Durrett, R. (1999) *Essentials of Stochastic Processes*, Springer.

[6] Elliot, R.J. and Kopp, P.E. (1999) *Mathematics of Financial Markets*, Springer.

[7] Gänssler, P. und Stute, W. (1977) *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer.

[8] Grimmet, G. and Stirzacker, D. (2001) *Probability and Random Processes*, 3rd Edition, Oxford University Press.

[9] Karatzas, I. and Shreve, S.E. (1999) *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd Edition, Springer.

[10] Karlin, S. and Taylor, H.M. (1975) *A First Course in Stochastic Processes*, 2nd Edition, Academic Press.

[11] Klenke, A. (2006) *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer.

[12] Krengel, U. (2003) *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*, 7. Auflage, Vieweg.

[13] Øksendal, B. (2002) *Stochastic Differential Equations*, 5th Edition, Springer.

[14] Petersen, K. (1989) *Ergodic Theory*, Cambridge University Press.

[15] Revuz, D. and Yor, M. (1999) *Continuous Martingales and Brownian Motion*, 3rd Edition, Springer.

[16] Shiryayev, A.N. (1984) *Probability*, Springer.