Übungen zu Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 4

1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Beweisen Sie bitte die Abschätzung

$$\|u - u_\Omega\|_{p^*} \le c\|Du\|_p \qquad \forall\, u \in H^{1,p}(\Omega),$$

wobei $1 \le p < n$ und

$$u_\Omega = \int_\Omega u.$$

Hinweis: Widerspruchbeweis.

2 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Definiere die *totale Variation* einer Funktion $u \in L^1(\Omega)$ als

$$\int_\Omega |Du| = \sup\{ \int_\Omega u D_i \eta^i : \eta_i \in C_c^\infty(\Omega),\ |\eta| \le 1,\ \eta = (\eta^i)\, \}$$

Zeigen Sie, daß der Raum $BV(\Omega)$ der Funktionen von *beschränkter Variation* ein Banachraum ist mit Norm

$$\|u\| = \|u\|_1 + \int_\Omega |Du|$$

und daß

$$H^{1,1}(\Omega) \subset BV(\Omega).$$

Beachten Sie, daß die Distributionsableitung von Funktionen in $BV(\Omega)$ im allgemeinen keine L^1-Funktionen sind, sondern Maße. Vergleichen Sie auch Chap. 10.10 von AII über vektorwertige Maße und die dortige Definition von totaler Variation.

3 Sei $u \in BV(\Omega)$, dann gilt für eine Mollifizierung u_ϵ von u

$$\lim \int_{\Omega'} |Du_\epsilon| = \int_{\Omega'} |Du| \tag{0.1}$$

für alle $\Omega' \Subset \Omega$ mit der Eigenschaft

$$\int_{\partial\Omega'} |Du| \equiv |Du|(\partial\Omega') = 0 \tag{0.2}$$

Wenn Ω beschränkt mit Lipschitzrand, dann lassen sich $BV(\Omega)$ Funktionen fortsetzen, so daß die Bedingung (0.2) für $\partial\Omega$ gilt, wobei u auch die fortgesetze Funktion bezeichnet, vgl. [2], siehe auch [1, Appendix I]; diese Hinweise gelten auch für Aufgabe 4.

4 Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ und $\partial\Omega \in C^{0,1}$, dann gelten die Sobolevschen Einbettungs- und Kompaktheitssätze für $H^{1,1}(\Omega)$ auch für $BV(\Omega)$, desgleichen auch die Existenz einer Spurabbildung.

Literatur

[1] Claus Gerhardt, *Existence and regularity of capillary surfaces*, Boll. Un. Mat. Ital. **10** (1974), 317–335, pdf file.

[2] ______, *Traces and extensions of bv-functions*, 2010, pdf file, Lecture Notes.