Übungen zu Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 5

1 Beweisen Sie bitte, daß der Gaußsche Divergenzsatz auch für Gebiete mit Lipschitz Rand gilt.
Hinweis: Lokalisieren Sie die Aussage mit Hilfe einer Zerlegung der Eins.

2 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit C^1-Rand und $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Nehme an, u habe in $x_0 \in \partial\Omega$ ein Extremum, dann existiert $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß in x_0

$$Du = \lambda\nu,$$

wobei ν die äußere Normale ist.

3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^2-Rand und $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ eine Lösung des Randwertproblems

$$Lu = -a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + cu = 0$$
$$\gamma^i u_{i|\partial\Omega} = 0$$

wobei L ein gleichmäßig elliptischer Operator mit bschränkten Koeffizienten ist, $c \in C^0(\bar{\Omega})$, $c \geq 0$, und das stetige Vektorfeld $\gamma \in C^0(\partial\Omega)$ der Bedingung genügt

$$\langle\gamma, \nu\rangle > 0.$$

Dann ist $u = \text{const.}$

4 Ω und u seien wie in Aufgabe 3, doch löse u jetzt das Randwertproblem

$$Lu = -a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + cu = 0$$
$$au + \gamma^i u_{i|\partial\Omega} = 0,$$

wobei $c \in C^0(\bar{\Omega})$, $c \geq 0$, und $a \in C^0(\partial\Omega)$ der Bedingung genügt

$$a\langle\gamma, \nu\rangle > 0.$$

Dann folgt $u \equiv 0$.