

# Hausdorff Dimension, Zufälligkeit und Berechenbarkeit

Jan Reimann

Institut für Informatik, Universität Heidelberg

# Hausdorff-Maße

- **Caratheodory-Hausdorff Konstruktion** auf metrischen Räumen:  $X$  metrischer Raum  $E \subseteq X$ , Metrik  $d$ ,  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  monoton wachsend, rechtsstetig mit  $h(0) = 0$ ,  $\delta > 0$ .
- Definiere eine Mengenfunktion

$$\mathcal{H}_\delta^h(E) = \inf \left\{ \sum_i h(d(U_i)) : E \subseteq \bigcup_i U_i, d(U_i) \leq \delta \right\}.$$

- Grenzübergang  $\delta \rightarrow 0$  liefert ein (äußeres) Maß.
- Das  **$h$ -dimensionale Hausdorff-Maß**  $\mathcal{H}^h$  ist definiert als

$$\mathcal{H}^h(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^h(E)$$

# Eigenschaften von Hausdorff-Maßen

- $\mathcal{H}^h$  ist **Borel regulär**:

alle Borelmengen  $B$  sind messbar, d. h.

$$(\forall A \subseteq X) \mathcal{H}^h(A) = \mathcal{H}^h(A \cap B) + \mathcal{H}^h(A \setminus B),$$

und für jedes  $A \subseteq X$  gibt es eine Borelmenge  $B \subseteq A$  mit

$$\mathcal{H}^h(B) = \mathcal{H}^h(A).$$

- Für  $s = 1$ , erhält man durch  $\mathcal{H}^1$  das übliche Lebesgue Maß  $\lambda$ .

# Vom Maß zur Dimension

- Eine naheliegende Wahl von  $h$  ist

$$h(x) = x^s$$

für  $s \geq 0$ . Wir bezeichnen das zugehörige Hausdorff-Maß mit  $\mathcal{H}^s$ .

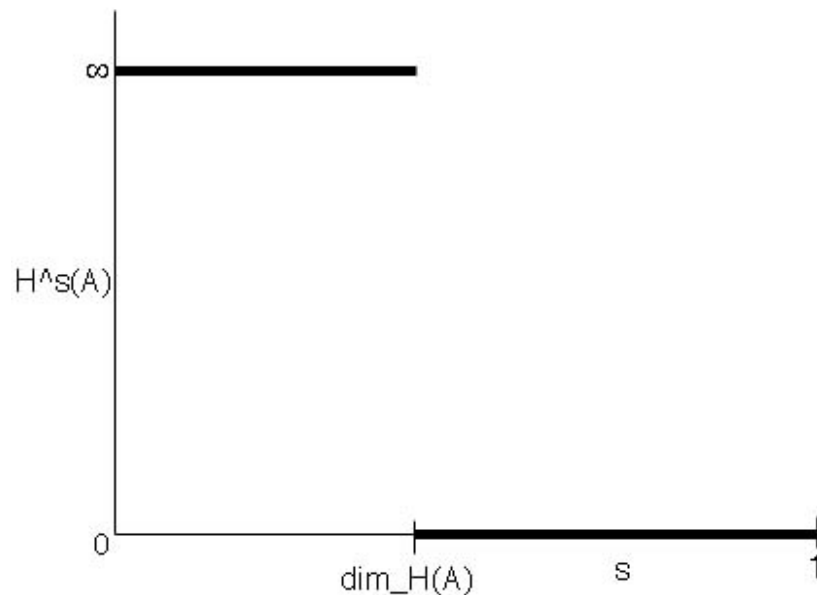
- **Wichtige Eigenschaft:** Für  $0 \leq s < t < \infty$  und  $E \subseteq X$ ,

$$\mathcal{H}^s(E) < \infty \Rightarrow \mathcal{H}^t(E) = 0,$$

$$\mathcal{H}^t(E) > 0 \rightarrow \mathcal{H}^s(E) = \infty.$$

# Hausdorff-Dimension

- Graphische Darstellung:



- Die **Hausdorff Dimension** einer Menge  $E$  ist definiert als

$$\begin{aligned}\dim_H(E) &= \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(E) = 0\} \\ &= \sup\{t \geq 0 : \mathcal{H}^t(E) = \infty\}\end{aligned}$$

# Eigenschaften der Hausdorff-Dimension

- **Lebesgue-Maß:** Aus  $\lambda(E) > 0$  folgt  $\dim_H(E) = 1$ .
- **Monotonie:**  $A \subseteq B \Rightarrow \dim_H(A) \leq \dim_H(B)$ .
- **Stabilität:** Für  $A_1, A_2, \dots \subseteq X$  gilt

$$\dim_H\left(\bigcup A_i\right) = \sup\{\dim_H(A_i)\}.$$

(Daraus folgt sofort, dass alle abzählbaren Mengen Dimension 0 haben.)

# Eigenschaften der Hausdorff-Dimension

- **Geometrische Transformationen:** Ist  $h : X \rightarrow X$  **Hölder stetig**, d.h. gibt es Konstanten  $c, \alpha > 0$  für die gilt, dass

$$(\forall x, y \in X) \quad d(x, y) \leq cd(x, y)^\alpha,$$

dann gilt

$$\dim_H h(E) \leq (1/\alpha) \dim_H(E).$$

- Für  $\alpha = 1$  ist  $h$  **Lipschitz-stetig**. Ist  $h$  in beide Richtungen Lipschitz, so folgt

$$\dim_H h(E) = \dim_H(E).$$

- **Fraktalgeometrie**  $\triangleq$  Studium von Eigenschaften, die unter Bi-Lipschitz-Abbildungen invariant sind.

# Berühmte Beispiele

- Julia-Mengen
- Koch-Schneeflocke
- Cantor-Menge

# Hausdorff-Dimension im Cantorraum

- **Cantor-Raum:**  $2^\omega$ . Metrik auf  $2^\omega$  ist gegeben durch

$$d(\alpha, \beta) = 2^{-N} \quad \text{wobei } N = \min\{n : \alpha(n) \neq \beta(n)\}.$$

- Zur Bestimmung der Hausdorff-Dimension reicht es aus, Überdeckungen aus **offenen Mengen** zu betrachten.
- Offene Mengen im Cantor-Raum sind **Vereinigungen von Zylindermengen**, gegeben durch einen endlichen String  $\sigma \in 2^{<\omega}$ .

$$[\sigma] := \{\alpha : \sigma \sqsubset \alpha\}.$$

Der Durchmesser eines Zylinders ist  $d[\sigma] = 2^{|\sigma|}$ .

# Hausdorff-Dimension im Cantorraum

- Beschreibung von  $\mathcal{H}^s$ -Nullmengen in  $2^\omega$ :

$A \subseteq 2^\omega$  hat  $s$ -dimensionales Hausdorff-Maß 0 g.d.w.

$$(\forall n \in \omega) (\exists C_n \subseteq 2^{<\omega}) A \subseteq \bigcup_{\sigma \in C_n} [\sigma] \wedge \sum_{\sigma \in C_n} 2^{-|\sigma|s} \leq 2^{-n}.$$

- **Effektivisierung:** Verlange, dass die  $C_n$  **effektiv** gegeben sind, z.B. als berechenbare Familie **rekursiv aufzählbarer Mengen** von Strings sind.

# Martingale

- Ein **(normiertes) Martingal** ist eine Funktion  $d : 2^{<\omega} \rightarrow [0, \infty)$  mit  $d(\varepsilon) = 1$  und

$$d(\sigma) = \frac{d(\sigma 0) + d(\sigma 1)}{2}.$$

- **Interpretation:** Vermögensfunktion eines fairen Wettspiels gegen eine unendliche Folge von Bits.

# Martingale und Hausdorff-Dimension

- Für  $s > 0$  heißt ein Martingal  $d$   $s$ -**erfolgreich** auf  $\alpha$ , wenn

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{d(\alpha \upharpoonright n)}{2^{(1-s)n}} = \infty$$

„**Optimales**“ Martingal:  $d(\alpha \upharpoonright n) = 2^n$  ( $s$ -erfolgreich für alle  $s \in (0, 1]$ ).

Für  $s > 1$  ist die "passive" Strategie (niemals wetten) auf jeder Folge  $\alpha$   $s$ -erfolgreich.

- **Theorem.**[Lutz; Staiger; Ryabko]  $A \subseteq 2^\omega$ ,  $d$  Martingal.  
Def.  $S^s(d) := \{\alpha \in 2^\omega \mid d \text{ } s\text{-erfolgreich auf } \alpha\}$ . Dann gilt

$$\dim_H(A) = \inf \{s : (\exists d) A \subseteq S^s(d)\}$$

# Dimension und Entropie

- Für  $\delta = 2^{-n}$ , einfache  $\delta$ -Überdeckung für  $A$ :

$$A^{[n]} := \{\alpha \upharpoonright n : \alpha \in A\}.$$

- **Minkowski- oder Box-Counting Dimension:**

$$\dim_B(A) := \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |A^{[n]}|}{n}.$$

Es gilt:  $\dim_H(A) \leq \dim_B(A)$ .

- Ist  $A$  **shift-invariant**, so nennt man  $\dim_B$  auch **topologische Entropie**, und für abgeschlossene Mengen  $A$  gilt

$$\dim_H(A) = \dim_B(A).$$

# Dimension und Entropie

- Für  $p \in [0, 1]$  bezeichne  $\mu_p$  das  $(p, 1 - p)$ -Bernoulli-Maß (Produktmaß auf  $2^\omega$  mit  $P[1] = p$ ,  $P[0] = 1 - p$ ). Die **Entropie**  $H(\mu_p)$  ist definiert als

$$H(\mu_p) = -[p \log p + (1 - p) \log(1 - p)].$$

- **Theorem.**[Eggleston] Für  $p \in [0, 1]$  sei

$$B = \left\{ \alpha \in 2^\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{i \leq n : \alpha(i) = 1\}|}{n} = p \right\}.$$

Dann gilt

$$\dim_H B = H(\mu_p).$$

# Effektives Hausdorff-Maß

- Führe effektive Überdeckungen ein und definiere **effektives  $\mathcal{H}^s$ -Maß**  $\mathcal{H}^s_1$ .
- (Sei  $s \geq 0$  rational.)  $A$  ist  $\Sigma_1^0$ - $\mathcal{H}^s$ -**null**,  $\Sigma_1^0$ - $\mathcal{H}^s(A) = 0$ , wenn es eine berechenbare Folge  $(C_n)$  von rek. aufzählbaren Mengen gibt, so dass für alle  $n$ ,

$$A \subseteq \bigcup_{\sigma \in C_n} [\sigma] \quad \text{and} \quad \sum_{\sigma \in C_n} 2^{-|\sigma|s} \leq 2^{-n}.$$

- Die Definition der **effektiven Hausdorff-Dimension** (auch  $\Sigma_1$ -Dimension) ergibt direkt:

$$\dim_H^1(A) = \inf\{s \geq 0 : \Sigma_1^0\text{-}\mathcal{H}^s(A) = 0\}.$$

# Eigenschaften der Effektiven Dimension

- Monotonie bleibt erhalten. Offensichtlich gilt auch  $\dim_{\mathcal{H}} A \leq \dim_{\mathcal{H}}^1 A$  für alle  $A \subseteq 2^{\omega}$ .
- **Zufällige Folgen:**  $\Sigma_1^0\text{-}\mathcal{H}^1$  entspricht Martin-Löfs effektiven Nullmengen. Eine Folge  $\alpha$ , die nicht  $\Sigma_1^0\text{-}\mathcal{H}^1$ -null ist, heißt **Martin-Löf-** oder **1-zufällig**. Offensichtlich gilt für 1-zufälliges  $\alpha$ ,  $\dim_{\mathcal{H}}^1(\alpha) = 1$ .
- **Stabilität:** [Lutz]  $\dim_{\mathcal{H}}^1(A) = \sup_{\xi \in A} \dim_{\mathcal{H}}^1(\xi)$   
Folgt aus der Existenz von **maximalen effektiven s-Nulltests**, d.h. einer rekursiven Folge von aufzählbaren Mengen  $\{U_n^s\}$ , für die gilt:

$$A \text{ ist } \Sigma_1^0\text{-}\mathcal{H}^s\text{-null} \iff (\forall \alpha \in A) \alpha \in \bigcap_n [U_n^s].$$

# Hölder-Transformationen im Cantor-Raum

- Eine Funktion  $\varphi : 2^{<\omega} \rightarrow 2^{<\omega}$  ist **monoton**, wenn  $\sigma \sqsubseteq \tau$   $\varphi(\sigma) \sqsubseteq \varphi(\tau)$  impliziert. Monotone Funktionen definieren **stetige Abbildungen**  $\Phi : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$ .
- Eine monotone Abbildung  $\varphi$  heißt  **$\alpha$ -expansiv**,  $\alpha > 0$ , wenn für alle  $\beta$  gilt, dass

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varphi(\beta \upharpoonright n)|}{n} \geq \alpha.$$

- **Theorem:** Sei  $\varphi$   $\alpha$ -expansiv. Dann gilt

$$\dim_{\text{H}}^1 \Phi(A) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_{\text{H}}^1(A).$$

# Algorithmische Entropie

- **Kolmogorov-Komplexität:** Sei  $U$  eine universelle Turing Maschine. Def. für einen beliebigen String  $\sigma$ ,

$$C(\sigma) = C_U(\sigma) = \min\{|p| : p \in 2^{<\omega}, U(p) = \sigma\},$$

d.h.  $C(\sigma)$  ist die Länge des kürzesten Programms (für  $U$ ), das  $\sigma$  ausgibt. (Unabhängig (bis auf Konstante) von der Wahl von  $U$ .)

- Beschreibung von algorithmischer Zufälligkeit  $\rightsquigarrow$   
**präfix-freie Komplexität**  $K$ . **Präfix-freie** Turing-Maschine:  
keine zwei konvergierenden Programme sind Präfixe voneinander.

- Es gilt:  $\alpha$  ML-zufällig  $\Leftrightarrow (\exists c) (\forall n) K(\alpha \upharpoonright n) \geq n - c$ .

# Kolmogorov-Komplexität und Coding

- Der Definitionsbereich einer präfix-freien Turing-Maschine ist ein **präfix-freier Code**.
- **Kraft-Chaitin Theorem:**  $\{\sigma_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  Menge von Strings und  $\{l_1, l_2, \dots\}$  Folge von natürlichen Zahlen ("Längen") mit

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-l_i} \leq 1,$$

so kann man (primitiv rekursiv) eine präfix-freie Maschine  $M$  und Strings  $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  konstruieren, so dass

$$|\tau_i| = l_i \quad \text{und} \quad M(\tau_i) = \sigma_i.$$

# Kolmogorov-Komplexität und Coding

- **Semimaße:**  $m : 2^{<\omega} \rightarrow [0, \infty)$  mit

$$\sum_{\sigma \in 2^{<\omega}} m(\sigma) \leq 1.$$

- Es existiert ein **maximales aufzählbares Semimaß**  $\tilde{m}$ , d.h.  $\tilde{m}$  ist aufzählbar von unten, und für alle anderen aufzählbaren Semimaße  $m$  gilt  $m \leq c_m \tilde{m}$  für eine Konstante  $c$ .
- **Coding-Theorem:** [Zvonkin-Levin]

$$K(\sigma) = -\log \tilde{m}(\sigma) + c.$$

# 'Hauptsatz' der effektiven Dimension

- **Theorem:** [Ryabko, Staiger, Cai and Hartmanis, Lutz, Tadaki, Mayordomo]

Für jede Folge  $\xi \in 2^\omega$  gilt

$$\dim_{\text{H}}^1(\xi) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{K(\xi \upharpoonright n)}{n}.$$

- Ein einfacher Beweis benutzt Semimaße.
- Es spielt für diese Charakterisierung der effektiven Dimension **keine Rolle, welche Version der Komplexität** man benutzt, da gilt

$$C(\sigma) \leq H(\sigma) \leq C(\sigma) + 2 \log C(\sigma).$$

# Zwei Beispiele

- **Gestreckte Zufälligkeit:**  $\xi$  ML-zufällig, definiere

$$\widehat{\xi} = \xi(0)0\xi(1)0\xi(2)0\dots$$

Dann gilt  $\dim_{\text{H}}^1(\widehat{\xi}) = 1/2$ .

- **Egglestons Folgen:**  $\mu_p$   $(p, 1 - p)$ -Bernoulli-Maß ( $p$  rational). Dann gilt für jede  $\mu_p$ -zufällige Folge

$$\dim_{\text{H}}^1(\xi) = \text{H}(\mu_p).$$

# Dimension und Zufälligkeit

- **Frage:** Wie 'zufällig' sind Folgen positiver Dimension?

# Perfekt Teilmengen

- **Cantor-Bendixson Theorem**: Jede überabzählbare, abgeschlossene Menge  $A \subseteq 2^\omega$  enthält eine **perfekte Teilmenge**, d.h. eine **homöomorphe Kopie** von  $2^\omega$ .
- **Gacs, Kucera**: Effektive Version – Jede  $\Pi_1^0$ -Menge von positivem Lebesgue-Maß kann effektiv surjektiv auf  $2^\omega$  abgebildet werden (durch einen **Turing-Prozess**).
- **Korollar**: Jede Folge ist Turing-reduzierbar auf eine ML-zufällige Folge.

# Turing-Prozesse

- Ein **Turing-Prozess** ist eine berechenbare monotone Funktion  $\varphi : 2^{<\omega} \rightarrow 2^{<\omega}$ . Induziert (partielle) Abbildung  $\Phi : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$ .
- Gilt  $\Phi(\alpha) = \beta$ , für einen Prozess  $\Phi$ , so folgt  $\beta \leq_T \alpha$ .

# Dimension und perfekte Teilmengen

- **Theorem:** Jede  $\Pi_1^0$ -Menge  $A$  mit Hausdorff-Dimension  $> s$  kann surjektiv auf  $2^\omega$  abgebildet werden durch einen berechenbaren,  $s$ -expansiven Prozess.

# Hausdorff- und Wahrscheinlichkeitsmaße

- Wesentlicher Bestandteil des Gacs-Kucera-Beweises:  
Gilt  $\lambda(A) > 2^{-n}$ , dann muss es  $\alpha, \beta \in 2^\omega$  geben, für die  $d(\alpha, \beta) \geq 2^{n-1}$ .
- **Theorem:** Ist  $A \in \Pi_1^0$ , und enthält  $A$  eine ML-zufällige Folge, so kann man effektiv ein  $\varepsilon > 0$  angeben, für das  $\lambda(A) > \varepsilon$  gilt.
- **Benötigt:** Berechenbares Maß 'ähnlich' zum uniformen (Lebesgue-) Maß, welches  $A$  'groß' macht.
- Ist  $\dim_H(A) > s$ , so ist  $A$  nicht  $\mathcal{H}^s$ -null.
- Aber für  $0 < s < 1$  ist  $\mathcal{H}^s$  kein Wahrscheinlichkeitsmaß:  
 $\mathcal{H}^s(2^\omega) = \infty$ .

# Frostmans Lemma

- Im 'klassischen Fall' existiert solch ein Maß, wenn  $A$  Borel ist.
- **Frostman's Lemma:** Sei  $B \subseteq 2^\omega$  Borel. Dann gilt  $\mathcal{H}^s(B) > 0$  g.d.w. es ein Radon Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  mit kompaktem Träger gibt, der in  $B$  enthalten ist, und so dass gilt

$$(\forall \sigma \in 2^{<\omega}) [\mu[\sigma] \leq 2^{-|\sigma|s}].$$

# Eine effektive Version

- Für  $\Pi_1^0$ -Mengen kann Frostmans Lemma effektivisiert werden.
- **Theorem:** Sei  $A \subseteq 2^\omega \cap \Pi_1^0$ . Dann gilt  $\mathcal{H}^s(A) > 0$  g.d.w. es ein berechenbares Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  gibt mit  $\mu(B) > 0$  und

$$(\forall \sigma \in 2^{<\omega}) [\mu[\sigma] \leq 2^{-|\sigma|s}].$$

# Konstruktion

- $T \subseteq 2^{<\omega}$  rekursiver Baum mit  $[T] = A$ .
- Def. eine Folge berechenbarer Maße  $\{\mu^n\}$ . Jedes  $\mu^n$  ist eine Approximation von  $\mu$ , kennt man nur die Pfade von  $T$  bis zur Länge  $n$ .
- Für  $n \in \mathbb{N}$ , def.  $\mu_n^n$  derart, dass für alle  $\sigma$  der Länge  $n$  gilt:

$$\mu_n^n \upharpoonright [\sigma] = \begin{cases} 2^{(1-s)n} \lambda \upharpoonright [\sigma], & \text{falls } \sigma \in T, \\ 0, & \text{falls } \sigma \notin T. \end{cases}$$

# Konstruktion

- Modifiziere  $\mu_n^n$  nach unten um  $\mu[\sigma] \leq 2^{-|\sigma|s}$  in allen Leveln  $\leq n$  sicherzustellen. Def.  $\mu_{n-1}^n$  über die Bedingung

$$\mu_{n-k-1}^n \upharpoonright [\sigma] = \gamma(\sigma) \mu_{n-k}^n \upharpoonright [\sigma]$$

wobei  $\gamma(\sigma) = \min\{1, 2^{-(n-k-1)s} (\mu_{n-k}^n[\sigma])^{-1}\}$ .

- Stoppe, sobald  $[T] \subseteq [\sigma]$  für ein  $\sigma$  der Länge  $k_0$  und def.  $\mu^n = \mu_{k_0}^n$ .  $k_0$  ist offensichtlich berechenbar, somit auch  $\mu^n$ , da alle  $\mu_m^n$  berechenbar sind.
- Setze  $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (\mu^n(2^\omega))^{-1} \mu^n$ .

# Dimension und Zufälligkeit

- Theorem legt Frage nahe: Ist jede Folge positiver Dimension zufällig bezüglich eines berechenbaren W.Maßes?
- **Anwendung:** Effektive Dimension von Turing-Kegeln.
- **Problem:** Gibt es Turing-untere-Kegel (Grade) von nicht-ganzzahliger Dimension?
- **Theorem:** [Levin]  
Jede Folge, die zufällig ist bzgl. eines berechenbaren W.Maßes ist Turing äquivalent zu einer Martin-Löf-zufälligen Folge.
- Somit würde eine positive Antwort auf die erste Frage die Existenz von unteren Kegeln nicht-ganzzahliger Dimension ausschließen.

# Improper Sequences

- Eine Folge heißt **unnatürlich** [Levin-Zvonkin], wenn sie bzgl. eines berechn. Maßes zufällig ist.
- **Klassische Resultate**: Es gibt eine **universelle Nullmenge**  $Z \subseteq 2^\omega$ , eine Teilmenge von  $2^\omega$  die kein nicht-atomares endliches Borel Maß 'trägt', die zudem positive Hausdorff Dimension hat. [Grzegorek, Fremlin, Zindulka]
- **Theorem**: [Muchnik] Jede 1-generische Folge ist unnatürlich.
- **Theorem**: Es gibt eine unnat. Folge der Dimension 1.
- Der Beweis benutzt die Technik des **schwachen Lipschitz-Join**

# Wieviel Zufälligkeit?

- Für **stärkere Reduzierbarkeiten** (bis  $tt$ ), gibt es untere Kegel nicht-ganzzahliger Dimension.  
[Ambos-Spies-Merkle-Reimann-Stefan,  
Reimann-Slaman]
- Für Turing-Reduzierbarkeit ist das Problem noch offen.
- Mögliche Lösung: Effektive Version der Kapazität.